Triangles

Le triangle au téléphone

Activité — Le triangle au téléphone

Un architecte doit faire reproduire à l'identique une parcelle triangulaire par un collègue situé à l'autre bout du pays. Il ne peut pas envoyer le dessin : il ne peut transmettre qu'un **message écrit**, contenant des mesures.
La classe est partagée en quatre groupes. Chaque groupe reçoit un message différent et n'en connaît pas le contenu.
Message A — « Mon triangle a trois angles : $40°$, $60°$ et $80°$. »
Message B — « Mon triangle a un côté de 8 cm, et les deux angles situés aux extrémités de ce côté mesurent $35°$ et $100°$. »
Message C — « Mon triangle a un côté de 6 cm, un côté de 9 cm et un angle de $50°$. »
Message D — « Mon triangle a trois angles : $50°$, $60°$ et $80°$. »

1. Individuellement, trace sur ton cahier le triangle décrit par le message de ton groupe.
2. En groupe, superposez vos productions par transparence. Sont-elles toutes superposables ?
3. Le message reçu décrit-il un seul triangle, plusieurs triangles, ou aucun ? Répondez par écrit.

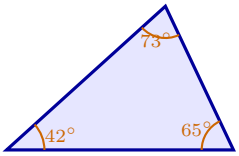
Séance 1 — La somme des angles d'un triangle

Objectif : Savoir calculer la mesure du troisième angle d'un triangle et justifier ce calcul ; Savoir démontrer que la somme des angles d'un triangle vaut $180°$

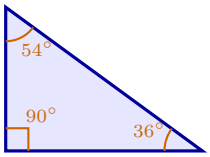
Activité — Le puzzle des trois coins

1. Tracer sur une feuille blanche un triangle **quelconque**, différent de celui de son voisin. Colorier ses trois angles de trois couleurs différentes.
2. Découper le triangle, puis découper les trois coins.
3. Juxtaposer les trois coins, sommets contre sommets, sans les superposer.
4. Que constate-t-on ? Comparer avec son voisin.

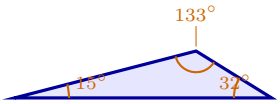
☑ Théorème — Propriété 1 : Somme des angles d'un triangle



$42 + 65 + 73 = 180$



$90 + 36 + 54 = 180$

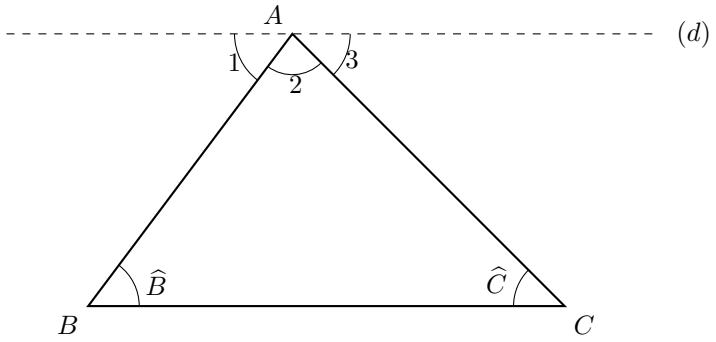


$15 + 32 + 133 = 180$

la somme ne dépend ni de la forme, ni de la taille : elle vaut toujours 180°.
Deux angles connus suffisent donc à déterminer le troisième — et un triangle ne peut avoir ni deux angles droits, ni deux angles obtus.

Trois triangles très différents, une même somme

Démonstration



Une parallèle à (BC) passant par A

On trace la droite (d) parallèle à (BC) passant par A. Elle fait apparaître au sommet A trois angles, numérotés 1, 2 et 3.

- Les angles 1 et $\widehat{ABC}$ sont _____ pour les droites parallèles (d) et (BC) coupées par la sécante (AB) : ils ont donc la même mesure.
- Les angles 3 et $\widehat{BCA}$ sont alternes-internes pour les droites parallèles (d) et (BC) coupées par la sécante (AC) : ils ont donc la même mesure.
- L'angle 2 est l'angle $\widehat{BAC}$.
- Les angles 1, 2 et 3 sont côte à côte et forment un angle _____ : $1 + 2 + 3 =$ _____.

En remplaçant, on obtient $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{BCA} =$ _____.

Exercice — Application directe

Calculer la mesure de l'angle manquant, en écrivant le calcul.

1. Dans le triangle ABC : $\widehat{A} = 47°$ et $\widehat{B} = 68°$.
2. Dans le triangle DEF : $\widehat{D} = 90°$ et $\widehat{E} = 34°$.
3. Dans le triangle GHI, isocèle en G : $\widehat{G} = 40°$.

Exercice — Trois copies à examiner

On cherche la mesure du troisième angle d'un triangle dont deux angles mesurent $47°$ et $68°$. Voici ce qu'ont écrit trois élèves.

- **Anaïs** : $180 - 47 + 68 = 133 + 68 = 201$
- **Bilal** : $180 - (47 + 68) = 180 - 115 = 65$
- **Cléo** : $47 + 68 = 115$, donc l'angle mesure $115°$

1. Quelle copie est correcte ?
2. Pour chacune des deux autres, dire à quelle étape précise l'erreur est commise et expliquer en une phrase pourquoi c'est une erreur.
3. L'une des copies pouvait être écartée sans refaire aucun calcul. Laquelle, et comment ?

Exercice — Vrai ou faux, en justifiant

1. Un triangle peut avoir un angle de $100°$ et un angle de $95°$.
2. Un triangle rectangle peut être isocèle.
3. Un triangle isocèle peut avoir un angle de $100°$ à sa base.

Séance 2 — Construire un triangle à partir de données partielles

Objectif : Savoir construire un triangle dont on ne connaît qu'une partie des données, et reconnaître les données qui ne suffisent pas

Activité — Quelles données faut-il transmettre ?

Reprendre les trois questions laissées ouvertes lors de l'activité.

1. Le message A donnait $40°$, $60°$, $80°$. Ces trois angles sont-ils compatibles ? Pourquoi les productions étaient-elles quand même toutes différentes ? Que faudrait-il ajouter ?
2. Le message C donnait 6 cm, 9 cm et $50°$. Réécrire ce message de deux façons, chacune ne laissant plus aucune ambiguïté.
3. Pourquoi le message B fonctionnait-il ?

Exercice — Constructions

Construire les triangles suivants en laissant les traits de construction, et rédiger pour chacun le programme de construction en trois lignes.

1. ABC tel que $AB = 7$ cm, $AC = 5$ cm, $BC = 4$ cm.
2. DEF tel que $DE = 6$ cm, $DF = 4{,}5$ cm et $\widehat{EDF} = 70°$.
3. GHI tel que $GH = 8$ cm, $\widehat{HGI} = 40°$ et $\widehat{GIH} = 65°$.

Exercice — Message impossible, message ambigu

1. Marius envoie : « mon triangle a un côté de 6 cm, un angle de $100°$ et un angle de $95°$ ». Que se passe-t-il ? Expliquer.
2. Nour envoie : « mon triangle a deux côtés de 5 cm et de 8 cm et un angle de $40°$ ». Tracer **deux** triangles différents répondant à ce message.
3. Réécrire le message de Nour pour qu'il ne décrive qu'un seul triangle.

Exercice — Triangles particuliers

1. Construire un triangle isocèle RST en R tel que $ST = 6$ cm et $\widehat{S} = 55°$.
2. Construire un triangle équilatéral de côté $4{,}5$ cm, sans rapporteur.

Séance 3 — Médiatrices et cercle circonscrit

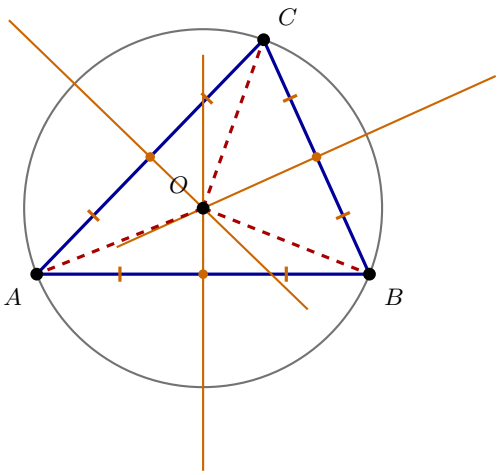
Objectif : Savoir où se trouve le centre du cercle circonscrit selon la nature du triangle, et le justifier

Activité — Le puits

Trois maisons sont bâties aux sommets d'un terrain triangulaire. On veut creuser un puits **à égale distance des trois maisons**.
Trois terrains sont proposés en annexe : un terrain « pointu » (tous les angles aigus), un terrain rectangle, un terrain « écrasé » (avec un angle obtus).

1. Pour chaque terrain, construire le point cherché à la règle et au compas. Quelle construction connue de 6e permet d'obtenir un point à égale distance de deux maisons ?
2. Tracer ensuite le cercle de centre ce point passant par une des maisons. Que constate-t-on ?
3. Dans les trois cas, le puits est-il sur le terrain ?
4. Que se passe-t-il dans le cas du terrain rectangle : le point obtenu a-t-il une position remarquable ?

Propriété 2 : Cercle circonscrit à un triangle



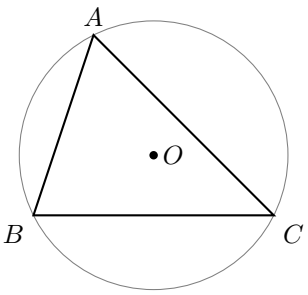
les trois **médiatrices** des côtés sont **concourantes** en un point O

$OA = OB = OC$: O est à égale distance des trois sommets

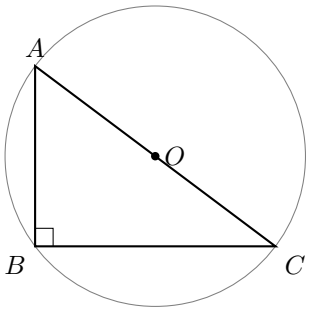
le cercle de centre O passant par les trois sommets est le cercle **circonscrit** au triangle

c'est parce qu'un point de la médiatrice de $[AB]$ est à égale distance de A et de B
que les trois droites se rencontrent : le point commun aux deux premières est déjà sur la troisième

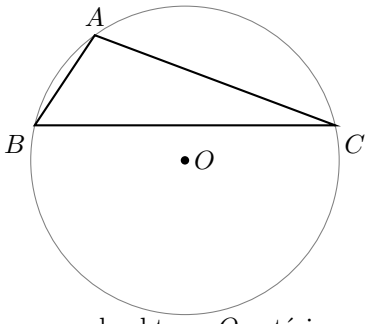
Les trois médiatrices concourantes, et le cercle qu'elles donnent



angles aigus : O intérieur



rectangle : O milieu de l'hypoténuse



un angle obtus : O extérieur

Le centre du cercle circonscrit selon la nature du triangle

Propriété 3 : Position du centre selon le triangle

Exercice — Application directe

1. ABC est un triangle rectangle en A tel que $BC = 9$ cm. Où se trouve le centre du cercle circonscrit ? Quel est son rayon ?
2. DEF est un triangle rectangle en E. Son cercle circonscrit a pour rayon $6{,}5$ cm. Combien mesure $[DF]$?
3. GHI est isocèle en G. Sans rien tracer, indiquer une droite dont on est sûr qu'elle passe par le centre du cercle circonscrit.

Exercice — L'affirmation de Diego

Diego affirme : « le centre du cercle circonscrit à un triangle est toujours à l'intérieur du triangle, sinon le cercle ne passerait pas par les sommets ».

1. Diego a-t-il raison ?
2. Construire un contre-exemple précis, avec ses mesures.
3. Expliquer en une phrase d'où vient sa confusion.

Exercice — Construction

Construire un triangle MNP tel que $MN = 7$ cm, $\widehat{M} = 30°$ et $\widehat{N} = 35°$, puis son cercle circonscrit. Le centre est-il à l'intérieur du triangle ? Était-ce prévisible sans tracer ?

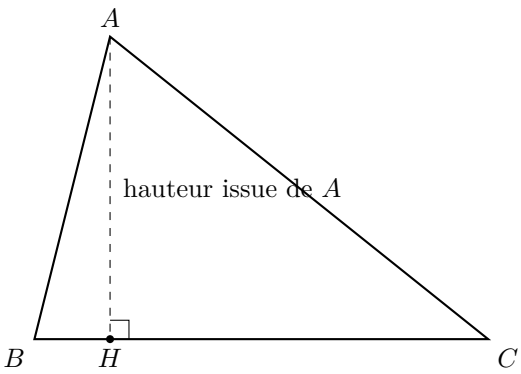
Séance 4 — Aire d'un triangle et hauteurs

Objectif : Savoir tracer une hauteur, y compris quand son pied tombe hors du côté, et calculer l'aire d'un triangle

Activité — La moitié du rectangle

1. Tracer un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 6$ cm et $BC = 4$ cm. Quelle est son aire ?
2. Tracer la diagonale $[AC]$. Que peut-on dire des deux triangles obtenus ? En déduire l'aire du triangle ABC.
3. Tracer maintenant un triangle EFG tel que $EF = 6$ cm, et G situé à 4 cm de la droite (EF), mais **pas** à la verticale de E ni de F. Encadrer ce triangle dans un rectangle de 6 cm sur 4 cm. Découper, comparer les morceaux : que vaut l'aire de EFG ?
4. Recommencer en plaçant G ailleurs, toujours à 4 cm de (EF). L'aire change-t-elle ?

Définition 1 : Hauteur d'un triangle



La hauteur issue de A et son pied H

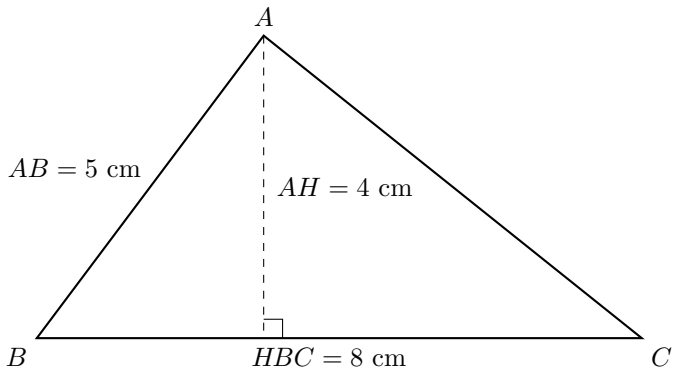
Propriété 4 : Aire d'un triangle

Exercice — Application directe

1. Un triangle a une base de 10 cm et la hauteur relative à cette base mesure 6 cm. Calculer son aire.
2. Un triangle a une aire de 30 cm² et une base de 12 cm. Combien mesure la hauteur relative à cette base ?
3. ABC est rectangle en A avec $AB = 6$ cm et $AC = 8$ cm. Calculer son aire. Quelle base et quelle hauteur a-t-on utilisées ?

Exercice — Trois calculs d'aire

Voici la figure d'un triangle ABC et le calcul rendu par trois élèves.



Le triangle de l'exercice

- **Nour** : $\dfrac{8 \times 5}{2} = 20$ cm²
- **Oscar** : $8 \times 4 = 32$ cm²
- **Paul** : $\dfrac{8 \times 4}{2} = 16$ cm²

1. Quelle copie est correcte ?
2. Pour chacune des deux autres, dire quelle donnée a été utilisée à tort ou quelle étape a été oubliée.
3. Quel élément de la figure permet de choisir les bonnes longueurs avant tout calcul ?

Exercice — Trois calculs, un seul résultat

RST est un triangle tel que $RS = 8$ cm et la hauteur issue de T mesure 3 cm.

1. Calculer l'aire de RST.
2. On mesure ensuite $ST = 6$ cm. Quelle doit être la longueur de la hauteur issue de R ? Justifier par un calcul.

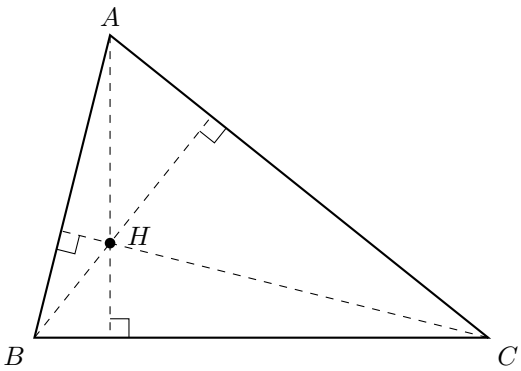
Séance 5 — Les hauteurs sont concourantes, les médianes aussi

◎ Objectif : Savoir tracer les médianes d'un triangle et démontrer qu'une médiane le partage en deux triangles de même aire

Activité — Trois droites, un point ?

1. Tracer un triangle ABC quelconque, assez grand, avec tous ses angles aigus. Tracer ses trois hauteurs à l'équerre. Que constate-t-on ?
2. Recommencer avec un triangle ayant un angle obtus. Les hauteurs se coupent-elles encore en un même point ? Ce point est-il dans le triangle ?
3. Tracer un nouveau triangle DEF. Placer les milieux de ses trois côtés, puis relier chaque sommet au milieu du côté opposé. Que constate-t-on ?
4. Dans le triangle de la question 3, la droite reliant D au milieu de $[EF]$ est-elle perpendiculaire à $[EF]$? Passe-t-elle par le centre du cercle circonscrit ?

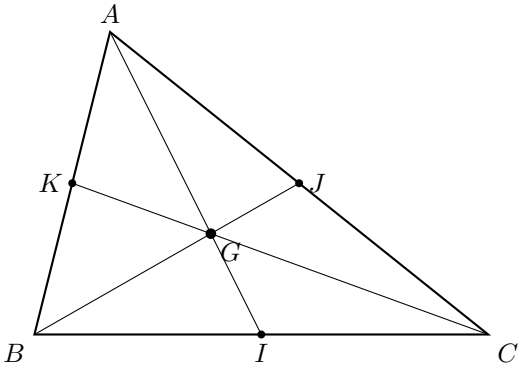
Propriété 5 : Les hauteurs d'un triangle



Les trois hauteurs et l'orthocentre

Définition 2 : Médiane d'un triangle

Propriété 6 : Les médianes d'un triangle



Les trois médianes et le centre de gravité

Exercice — Reconnaître et tracer

Tracer un triangle ABC tel que $AB = 7$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 9$ cm, puis :

1. tracer en rouge la hauteur issue de A ;
2. tracer en bleu la médiane issue de A ;
3. tracer en vert la médiatrice de $[BC]$;
4. ces trois droites sont-elles confondues ? deux d'entre elles le sont-elles ?

Exercice — L'affirmation de Sarah

Sarah écrit dans son cahier : « la hauteur issue de A passe par le milieu de $[BC]$, donc pour la tracer il suffit de relier A au milieu de $[BC]$ ».

1. Sarah a-t-elle toujours raison ?
2. Justifie ta réponse par une figure, en mesurant l'angle que fait la droite de Sarah avec $[BC]$.
3. Existe-t-il des triangles pour lesquels le procédé de Sarah convient ? Lesquels ?
4. Quelle droite du triangle Sarah trace-t-elle en réalité ?

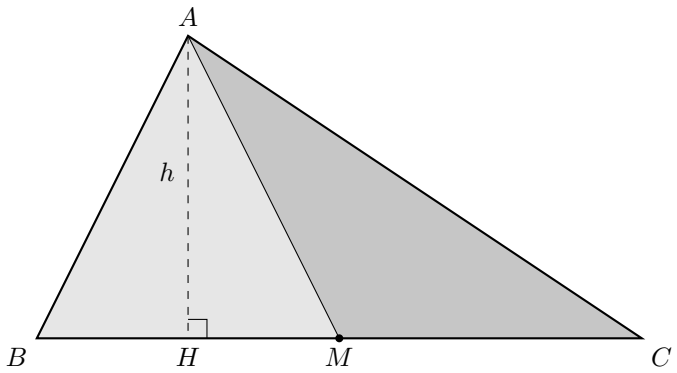
Séance 6 — Médiane et aires, triangles particuliers, bilan

Objectif : Savoir reconnaître, dans un triangle isocèle ou équilatéral, les droites remarquables confondues

Une médiane partage le triangle en deux

Activité — Deux moitiés de même aire ?

ABC est un triangle, M est le milieu de $[BC]$. On trace la médiane $[AM]$ et la hauteur issue de A, de pied H et de longueur h.



Une médiane et la hauteur issue du même sommet

1. Quelle est la base du triangle ABM ? Quelle est la hauteur relative à cette base ?
2. Même question pour le triangle ACM.
3. Comparer BM et MC.
4. En déduire une comparaison des aires des triangles ABM et ACM.

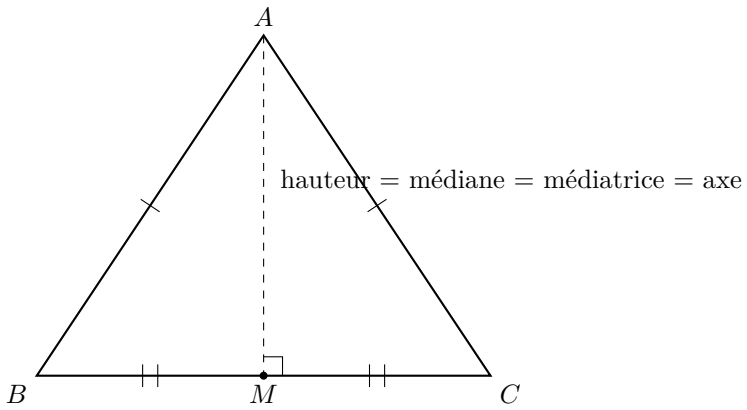
Propriété 7 : Médiane et aires

Démonstration. M est le milieu de $[BC]$ et h est la longueur de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

- Dans le triangle ABM, la hauteur issue de A est la même que dans ABC car B, M et C sont _____ : son aire vaut $\dfrac{BM \times h}{\quad}$.
- Dans le triangle ACM, pour la même raison, l'aire vaut $\dfrac{MC \times h}{\quad}$.
- Or M est le milieu de $[BC]$, donc $BM =$ _____.
- Les deux aires sont donc _____.

Les triangles particuliers

Propriété 8 : Droites remarquables dans un triangle isocèle



Les droites confondues d'un triangle isocèle

Propriété 9 : Cas du triangle équilatéral

Exercice — Vrai ou faux, en justifiant

1. Dans tout triangle, la médiane issue de A est perpendiculaire à $[BC]$.
2. Dans un triangle isocèle en A, la médiane issue de B est aussi une hauteur.
3. Une médiane partage un triangle en deux triangles superposables.
4. Le centre de gravité d'un triangle est toujours intérieur au triangle.

Exercice — Synthèse

ABC est isocèle en A, avec $BC = 6$ cm et $\widehat{B} = 70°$. On note M le milieu de $[BC]$ et on donne $AM = 8{,}2$ cm.

1. Calculer $\widehat{A}$.
2. Justifier que (AM) est perpendiculaire à (BC).
3. Calculer l'aire du triangle ABC.
4. Calculer l'aire du triangle ABM de deux façons différentes.

Entraînement en ligne

Ces exercices sont générés au hasard : on peut les refaire autant de fois que nécessaire, la correction est immédiate.

> **La note ne compte pour le bonus que si l'on est connecté.** En ouvrant un exercice par l'un des liens ci-dessous, on s'entraîne librement, mais rien n'est enregistré. Pour que le travail compte, il faut passer par la classe sur WIMS et ouvrir la feuille de la séquence.

- Obj. 1.1 Angles d'un triangle isocèle
- Obj. 1.2 Écrire le calcul du troisième angle
- Obj. 2.1 Pourquoi la somme vaut 180°
- Obj. 3.1 Les données suffisent-elles ?
- Obj. 4.1 Où est le centre du cercle circonscrit ?
- Obj. 5.1 L'aire d'un triangle
- Obj. 5.2 Une hauteur hors du triangle
- Obj. 6.1 Médianes et aires
- Obj. 7.1 Droites confondues dans un triangle isocèle
- Révision : lire le codage d'un triangle
- Révision : le troisième angle