Triangles

1 Séance 4 — Aire d'un triangle et hauteurs

Activité — La moitié du rectangle

1. Tracer un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 6$ cm et $BC = 4$ cm. Quelle est son aire ?
2. Tracer la diagonale $[AC]$. Que peut-on dire des deux triangles obtenus ? En déduire l'aire du triangle ABC.
3. Tracer maintenant un triangle EFG tel que $EF = 6$ cm, et G situé à 4 cm de la droite (EF), mais **pas** à la verticale de E ni de F. Encadrer ce triangle dans un rectangle de 6 cm sur 4 cm. Découper, comparer les morceaux : que vaut l'aire de EFG ?
4. Recommencer en plaçant G ailleurs, toujours à 4 cm de (EF). L'aire change-t-elle ?

1. 24 cm².
2. Les deux triangles sont superposables (symétrie par rapport au centre du rectangle) : chacun a pour aire $24 \div 2 = 12$ cm².
3. Le rectangle est partagé par la hauteur issue de G en deux petits rectangles, dont le triangle occupe exactement la moitié de chacun : l'aire vaut encore 12 cm².
4. Elle ne change pas : seule compte la distance de G à la droite (EF).

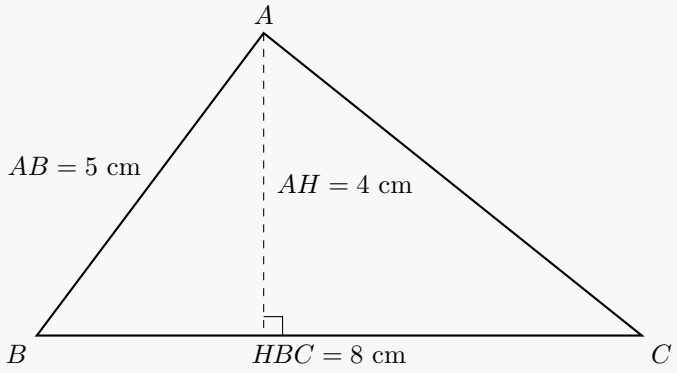
Exercice — Application directe

1. Un triangle a une base de 10 cm et la hauteur relative à cette base mesure 6 cm. Calculer son aire.
2. Un triangle a une aire de 30 cm² et une base de 12 cm. Combien mesure la hauteur relative à cette base ?
3. ABC est rectangle en A avec $AB = 6$ cm et $AC = 8$ cm. Calculer son aire. Quelle base et quelle hauteur a-t-on utilisées ?

1. $\dfrac{10 \times 6}{2} = 30$ cm².
2. $12 \times h \div 2 = 30$, donc $12 \times h = 60$ et $h = 5$ cm.
3. $\dfrac{6 \times 8}{2} = 24$ cm². On a pris $[AB]$ comme base et $[AC]$ comme hauteur relative : dans un triangle rectangle, chacun des deux côtés de l'angle droit est la hauteur relative à l'autre. C'est le seul cas où la hauteur est aussi un côté.

Exercice — Trois calculs d'aire

Voici la figure d'un triangle ABC et le calcul rendu par trois élèves.



Le triangle de l'exercice

- **Nour** : $\dfrac{8 \times 5}{2} = 20$ cm²
- **Oscar** : $8 \times 4 = 32$ cm²
- **Paul** : $\dfrac{8 \times 4}{2} = 16$ cm²

1. Quelle copie est correcte ?
2. Pour chacune des deux autres, dire quelle donnée a été utilisée à tort ou quelle étape a été oubliée.
3. Quel élément de la figure permet de choisir les bonnes longueurs avant tout calcul ?

1. Paul.
2. **Nour** a utilisé $AB = 5$ cm comme s'il s'agissait d'une hauteur. Or $[AB]$ n'est pas perpendiculaire à $[BC]$: c'est un côté, pas une hauteur. Elle a bien divisé par 2, son erreur est dans le choix des longueurs. **Oscar** a choisi la bonne base et la bonne hauteur, mais a oublié de diviser par 2 : il a calculé l'aire du rectangle qui encadre le triangle.
3. La hauteur est tracée en pointillés avec un codage d'angle droit ; $[AB]$ ne porte pas ce codage. En observant la figure, $AH = 4$ cm est la seule longueur perpendiculaire à la base $[BC]$.

Exercice — Trois calculs, un seul résultat

RST est un triangle tel que $RS = 8$ cm et la hauteur issue de T mesure 3 cm.

1. Calculer l'aire de RST.
2. On mesure ensuite $ST = 6$ cm. Quelle doit être la longueur de la hauteur issue de R ? Justifier par un calcul.

1. $\dfrac{8 \times 3}{2} = 12$ cm².
2. L'aire ne dépend pas de la base choisie : $\dfrac{6 \times h}{2} = 12$, donc $6 \times h = 24$ et $h = 4$ cm.