Triangles

1 Séance 3 — Médiatrices et cercle circonscrit

Activité — Le puits

Trois maisons sont bâties aux sommets d'un terrain triangulaire. On veut creuser un puits **à égale distance des trois maisons**.
Trois terrains sont proposés en annexe : un terrain « pointu » (tous les angles aigus), un terrain rectangle, un terrain « écrasé » (avec un angle obtus).

1. Pour chaque terrain, construire le point cherché à la règle et au compas. Quelle construction connue de 6e permet d'obtenir un point à égale distance de deux maisons ?
2. Tracer ensuite le cercle de centre ce point passant par une des maisons. Que constate-t-on ?
3. Dans les trois cas, le puits est-il sur le terrain ?
4. Que se passe-t-il dans le cas du terrain rectangle : le point obtenu a-t-il une position remarquable ?

1. La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points à égale distance de ses extrémités : on trace deux médiatrices, leur intersection convient. Elles sont concourantes (propriété de 6e), la troisième passe donc aussi par ce point — le faire vérifier, c'est un contrôle, pas une découverte.
2. Le cercle passe par les trois sommets.
3. Terrain pointu : le puits est à l'intérieur. Terrain rectangle : il est sur un côté. Terrain écrasé : il est **à l'extérieur** du terrain. C'est le résultat qui surprend, et celui qu'il faut faire verbaliser.
4. Il est au milieu du plus grand côté, celui qui est opposé à l'angle droit.

Exercice — Application directe

1. ABC est un triangle rectangle en A tel que $BC = 9$ cm. Où se trouve le centre du cercle circonscrit ? Quel est son rayon ?
2. DEF est un triangle rectangle en E. Son cercle circonscrit a pour rayon 6,5 cm. Combien mesure $[DF]$?
3. GHI est isocèle en G. Sans rien tracer, indiquer une droite dont on est sûr qu'elle passe par le centre du cercle circonscrit.

1. Le centre est le milieu de $[BC]$, l'hypoténuse. Le rayon vaut $9 \div 2 = 4{,}5$ cm.
2. $[DF]$ est l'hypoténuse (côté opposé à l'angle droit en E) et vaut le double du rayon : $6{,}5 \times 2 = 13$ cm.
3. La médiatrice de $[HI]$, c'est-à-dire l'axe de symétrie du triangle.

Exercice — L'affirmation de Diego

Diego affirme : « le centre du cercle circonscrit à un triangle est toujours à l'intérieur du triangle, sinon le cercle ne passerait pas par les sommets ».

1. Diego a-t-il raison ?
2. Construire un contre-exemple précis, avec ses mesures.
3. Expliquer en une phrase d'où vient sa confusion.

1. Non.
2. Par exemple ABC avec $BC = 8$ cm, $\widehat{B} = 20°$, $\widehat{C} = 25°$ (l'angle en A vaut alors $135°$). Le centre du cercle circonscrit est nettement au-dessous de $[BC]$, hors du triangle. Toute construction avec un angle obtus est acceptée.
3. Il confond « le cercle contient les trois sommets » et « le cercle contient le triangle ». Le cercle contient bien le triangle tout entier ; c'est son **centre** qui peut en sortir.

Exercice — Construction

Construire un triangle MNP tel que $MN = 7$ cm, $\widehat{M} = 30°$ et $\widehat{N} = 35°$, puis son cercle circonscrit. Le centre est-il à l'intérieur du triangle ? Était-ce prévisible sans tracer ?

$\widehat{P} = 180 - (30 + 35) = 115°$: le triangle a un angle obtus, le centre est donc à l'extérieur, et on pouvait le prévoir par le seul calcul du troisième angle. La construction ne fait que confirmer.
C'est l'exercice de synthèse de la séance : le calcul d'angle de la séance 1 sert ici d'outil de prévision.