Puissances de dix

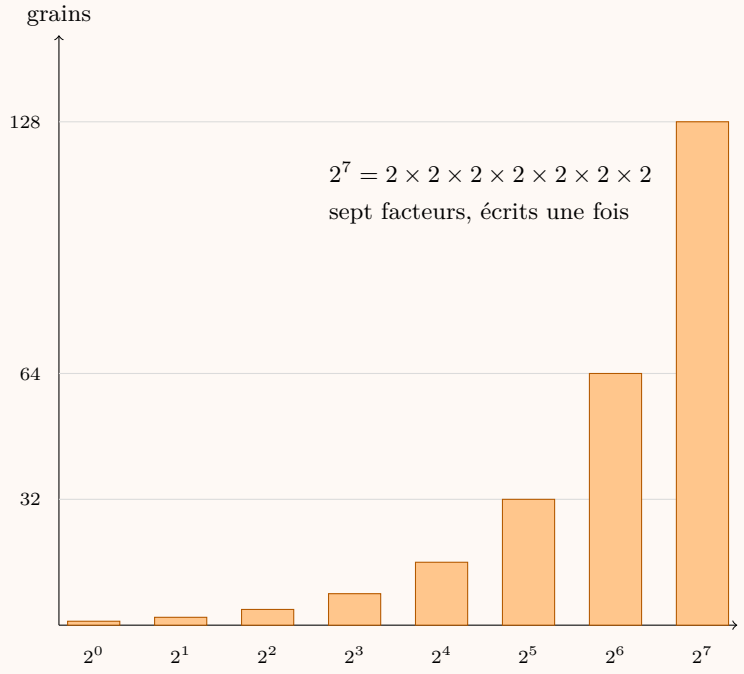
1 Séance 8 — Des puissances pour toutes les bases

Activité — Raccourcir une écriture

Voici quatre produits.

- $P = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$
- $Q = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$
- $R = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
- $S = 4 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 4$

1. Pour chacun, dis combien de fois chaque facteur apparaît.
2. Propose une écriture plus courte, en t'inspirant de ce que tu sais déjà pour 10^n et pour a^2.
3. Calcule P et Q.
4. Sans calculer R, dis lequel de R ou de 10^3 est le plus grand. Explique.



chaque case double la précédente : la case 64 en contient déjà 2^{63}

Chaque case double la précédente

1. P : cinq fois 7. Q : deux fois 3, trois fois 5. R : dix fois 2. S : quatre fois 4 et deux fois 6 — le quatrième facteur 4 est en fin de produit, il faut avoir lu jusqu'au bout.
2. $P = 7^5$; $Q = 3^2 \times 5^3$; $R = 2^{10}$; $S = 4^4 \times 6^2$.
3. $P = 16\,807$ et $Q = 9 \times 125 = 1\,125$.
4. $R = 1\,024$ et $10^3 = 1\,000$, donc $R > 10^3$. Une justification sans calculatrice est acceptée : $2^{10} = 2^5 \times 2^5$ soit $32 \times 32 = 1\,024$.

Exercice — Calculer

Donne la valeur de chaque puissance.

a. 3^4 b. 2^6 c. 5^3 d. 7^2 e. 1^{12} f. 9^0 g. 4^3 h. 6^1

a. 81 — b. 64 — c. 125 — d. 49 — e. 1 — f. 1 — g. 64 — h. 6.

Exercice — Simplifier l'écriture

Écris chaque produit le plus simplement possible, à l'aide de puissances.

a. $8 \times 8 \times 8$

b. $x \times x \times x \times x$

c. $2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 7$

d. $5^2 \times 5^6$

e. $a^3 \times a$

f. $3 \times 3 \times 3 \times 4 \times 3$

g. $2^4 \times 3^2 \times 2^5$

a. 8^3 — c. $2^2 \times 7^3$ — e. a^4 — g. $2^9 \times 3^2$.

b. x^4 — d. 5^8 — f. $3^4 \times 4$ —

Exercice — Trois calculs à examiner

Trois élèves ont calculé $2 + 3 \times 5^2$.

Adam : $2 + 3 \times 5^2 = 5 \times 5^2 = 5^3 = 125$

Lina : $2 + 3 \times 5^2 = 2 + 15^2 = 2 + 225 = 227$

Rayan : $2 + 3 \times 5^2 = 2 + 3 \times 25 = 2 + 75 = 77$

1. Qui a juste ?
2. Pour chacun des deux autres, indique la ligne où l'erreur apparaît et dis quelle règle a été enfreinte.

1. Rayan.
2. **Adam**, dès la première ligne : il a calculé $2 + 3$ avant la multiplication, alors que la multiplication est prioritaire sur l'addition. Son écriture est en outre acceptable ensuite — 5×5^2 vaut bien 5^3 — ce qui rend son erreur d'autant plus discrète. **Lina**, dès la première ligne également : elle a multiplié 3 par 5 avant d'élever au carré, alors que la puissance est prioritaire sur la multiplication. Elle a en fait calculé $(3 \times 5)^2$.

Exercice — Vrai ou faux, avec justification

a. $2^5 = 10$

b. $3^2 \times 3^3 = 3^6$

c. $4^2 \times 4^2 = 4^4$

d. $2^3 + 2^3 = 2^6$

e. $(2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$

a. Faux : $2^5 = 32$. L'exposant ne se multiplie pas à la base.

b. Faux : $2 + 3 = 5$, donc $3^2 \times 3^3 = 3^5$.

c. Vrai : $2 + 2 = 4$.

d. Faux : $2^3 + 2^3 = 8 + 8 = 16$, alors que $2^6 = 64$. Il n'existe aucune règle sur les exposants dans une somme.

e. Vrai : $(2 \times 5)^3 = 10^3 = 1\,000$ et $2^3 \times 5^3 = 8 \times 125 = 1\,000$.