Factorisations

1 Activité de découverte — Trois réussites et une impasse

Activité — Quand le facteur commun n'existe pas

Factoriser une expression, c'est l'écrire sous forme de produit. La 4e a appris à le faire en mettant en évidence un facteur commun.

1. Factorise $6x+9$, puis $5x^2+5x$ (*indice :* $5x^2$ *s'écrit aussi* $5\times x\times x$), puis $(x+2)(x-1)+(x+2)\times 3x$. Dans ces trois cas, quel était le facteur commun, et fallait-il réécrire un terme pour le voir ?

$$6x+9 \longrightarrow \boxed{3}\times 2x + \boxed{3}\times 3 \longrightarrow = 3(2x+3)$$

$$5x^2+5x \longrightarrow \boxed{5x}\times x + \boxed{5x}\times 1 \longrightarrow = 5x(x+1)$$

$$(x+2)(x-1)+(x+2)\times 3x \longrightarrow \boxed{(x+2)}\times(x-1) + \boxed{(x+2)}\times 3x \longrightarrow = (x+2)(4x-1)$$

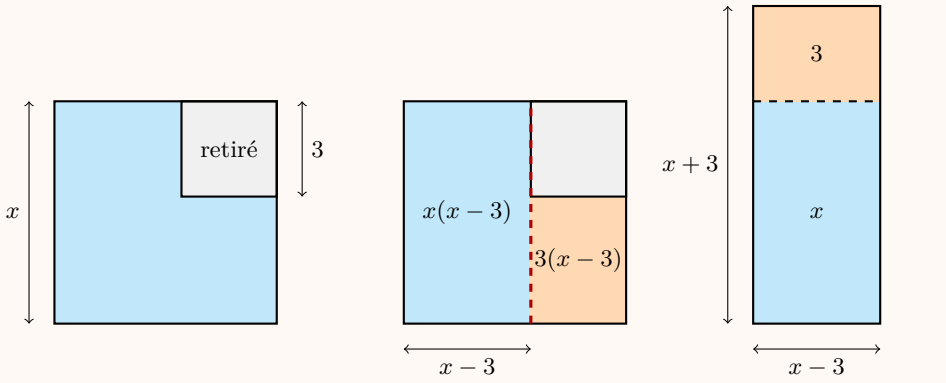
le facteur commun est surligné : il faut souvent le *fabriquer*,
en réécrivant chaque terme sous forme de produit

Le facteur commun des trois expressions, une fois écrit en clair

2. On veut maintenant factoriser x^2-9. Cherche un facteur commun aux deux termes x^2 et 9 : que constates-tu ? Recopie et complète le tableau suivant, puis compare les deux lignes. Peux-tu en conclure que $x^2-9=(x-3)(x+3)$ pour **tous** les nombres ?

x	0	1	2	3	4	5	10
x^2-9	…	…	…	…	…	…	…
$(x-3)(x+3)$	…	…	…	…	…	…	…

La place d'un village est un carré de x mètres de côté, entièrement dallée sauf une réservation carrée de 3 m de côté, laissée dans un coin pour un arbre.



1. l'aire restante x^2-9 — **2. on coupe** deux rectangles — **3. le même domaine**

La place, la réservation, et le domaine dallé recomposé

3. Explique pourquoi l'aire dallée vaut x^2-9. Sur la figure 2, le domaine dallé est coupé en deux rectangles : donne leur largeur commune, puis l'aire de chacun. Sur la figure 3, les deux rectangles sont remis bout à bout : donne les dimensions du rectangle obtenu, puis son aire sous forme de produit.
4. Les figures 1 et 3 représentent le même domaine dallé. Qu'as-tu démontré ? Factorise alors x^2-49.

1. $6x+9 = 3\times 2x + 3\times 3 = 3(2x+3)$; $5x^2+5x = 5x\times x + 5x\times 1 = 5x(x+1)$; $(x+2)(x-1)+(x+2)\times 3x = (x+2)\big[(x-1)+3x\big] = (x+2)(4x-1)$. Facteur commun 3, écrit tel quel dans $6x$ mais pas dans 9 ; puis $5x$, qui n'est écrit nulle part ; puis $(x+2)$, une parenthèse entière. Dans les trois cas il a fallu réécrire au moins un terme sous forme de produit.
2. Il n'y a aucun facteur commun : le seul diviseur commun à x^2 et à 9 est 1, et mettre 1 en facteur ne change rien. Le tableau complété :

x	0	1	2	3	4	5	10
x^2-9	-9	-8	-5	0	7	16	91
$(x-3)(x+3)$	-9	-8	-5	0	7	16	91

Les deux lignes sont identiques pour les sept valeurs essayées, mais sept essais réussis ne disent rien des autres nombres, et il y en a une infinité. Il manque une **démonstration**.

3. La place est un carré de côté x, donc son aire vaut x^2 ; on en retire un carré de 3 m de côté, d'aire 9 : il reste x^2-9. Les deux rectangles ont pour largeur commune $x-3$; le premier mesure $x-3$ sur x, son aire est $x(x-3)$, le second mesure $x-3$ sur 3, son aire est $3(x-3)$. Remis bout à bout, ils forment un rectangle de $x-3$ sur $x+3$, d'aire $(x-3)(x+3)$.
4. Que x^2-9 et $(x-3)(x+3)$ mesurent la même chose — non pas pour sept valeurs, mais pour toutes celles qui donnent une place possible. Cette fois c'est une démonstration, et non un relevé. Sur le même modèle, $x^2-49 = x^2-7^2 = (x-7)(x+7)$.