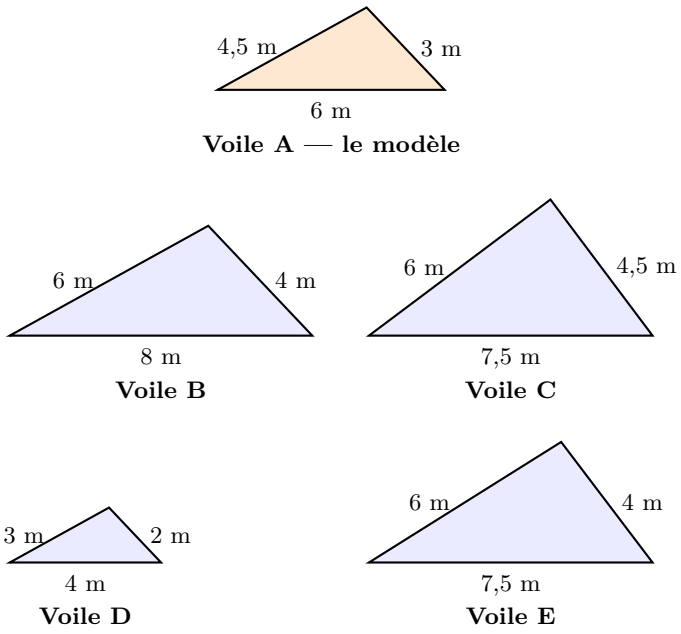
Triangles semblables

Activité de découverte — Les voiles du chantier

Activité — « La même, en plus grand »

Ana est voilière : elle coupe et coud les voiles latines des barques traditionnelles. Un client lui commande *la même voile que le modèle A, mais en plus grand*. Quatre ateliers lui envoient chacun une proposition.



Le modèle et les quatre voiles proposées

1. À l'œil, sans rien calculer : laquelle de ces quatre voiles te semble être « le modèle en plus grand » ? Note ta réponse.
2. Pour chaque voile, divise chacun de ses côtés par le côté correspondant du modèle A — pour la voile B : $\frac{8}{6}$, $\frac{6}{4{,}5}$ et $\frac{4}{3}$. Quelles voiles sont vraiment le modèle agrandi ou réduit ? Compare avec ta réponse à la question 1.
3. Chacun son triangle. Trace un segment $[RS]$ de la longueur de ton choix, entre 5 cm et 12 cm, puis un angle de $40°$ de sommet R et un angle de $65°$ de sommet S, du même côté de $[RS]$: les deux demi-droites se coupent en T. Mesure RT et ST, et reporte tes trois longueurs dans le relevé collectif.
4. Choisis le triangle d'un camarade dont le segment $[RS]$ n'a pas la même longueur que le tien, et calcule les trois quotients de ses côtés par les tiens. Que remarques-tu ? Deux angles suffisent-ils à fixer la forme d'un triangle ? En es-tu sûr ?

Séance 1 — Reconnaître deux triangles semblables

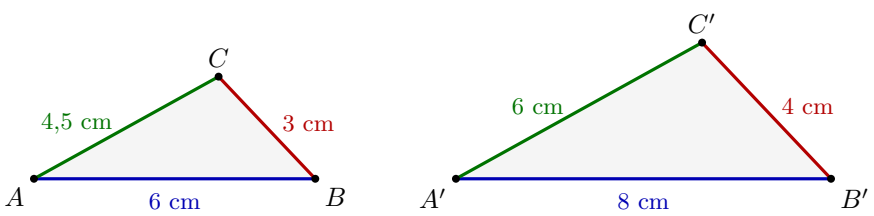
Objectif : Décider si deux triangles sont semblables en testant la proportionnalité de leurs côtés ; Apparier correctement les sommets de deux triangles semblables, quelle que soit leur orientation

Mise en commun de l'activité

L'activité s'est arrêtée sur un tri et une conjecture :

> Deux voiles ont « la même forme » quand on passe de l'une à l'autre en multipliant toutes les longueurs par un même nombre — pas en leur ajoutant la même longueur.
>
> Dans la classe, deux triangles ayant les mêmes angles avaient aussi leurs côtés proportionnels. Rien de tout cela n'est démontré.

Définition 1 : Triangles semblables



Deux triangles semblables : les côtés de même couleur se correspondent

Commencés en classe, terminés à la maison, corrigés en ouverture de la séance 2.

Exercice — Trier

Voici trois paires de triangles. Pour chacune, dis si les deux triangles sont semblables, et donne le rapport quand ils le sont.

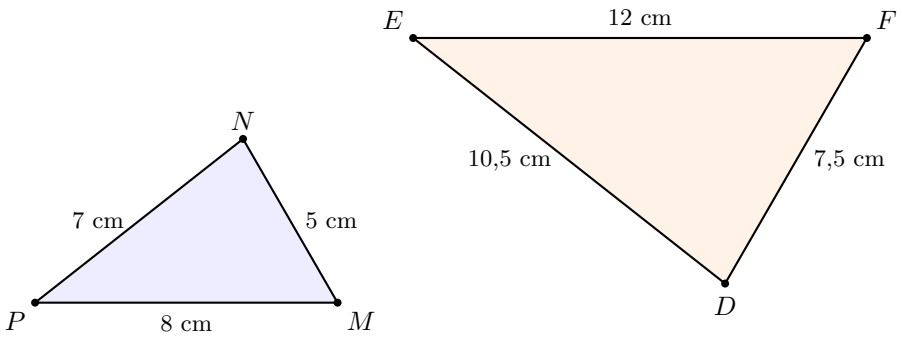
a. Triangle de côtés 3 ; 5 ; 7 et triangle de côtés 9 ; 15 ; 21.

b. Triangle de côtés 4 ; 6 ; 8 et triangle de côtés 6 ; 8 ; 10.

c. Triangle de côtés $2{,}5$; 4 ; 5 et triangle de côtés 10 ; 16 ; 20.

Exercice — Apparier les sommets

Les triangles MNP et DEF ci-dessous sont semblables.



Deux triangles semblables, dessinés dans des orientations différentes

1. Vérifie qu'ils sont bien semblables, et donne le rapport.
2. Recopie et complète : le sommet M correspond au sommet …, le sommet N au sommet …, le sommet P au sommet ….
3. Recopie et complète, sans faire aucun calcul :

$$\frac{MN}{\ldots} = \frac{\ldots}{DE} = \frac{\ldots}{\ldots}$$

Exercice — La copie de Yanis

Yanis doit décider si un triangle de côtés 6 ; 9 ; 12 et un triangle de côtés 8 ; 12 ; 16 sont semblables. Voici sa copie :

> $12 - 6 = 6$ et $16 - 8 = 8$, donc les différences ne sont pas les mêmes.
>
> Les triangles ne sont pas semblables.

1. La conclusion de Yanis est-elle juste ?
2. Sa démarche est-elle correcte ? Si elle ne l'est pas, explique ce qui ne va pas et écris la démarche correcte.

Séance 2 — Même forme, mêmes angles

◎ Objectif : Démontrer que deux triangles sont semblables à partir de deux angles égaux ; Justifier la caractérisation angulaire en reportant un triangle dans l'autre

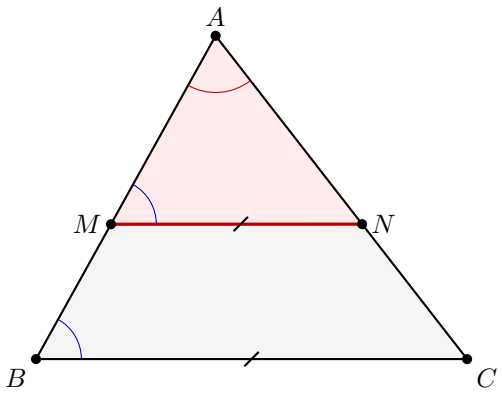
Ce que la classe a observé

À la question 3 de l'activité, tous les triangles construits avec un angle de $40°$ et un angle de $65°$ avaient leurs côtés proportionnels, quelle que soit la longueur choisie au départ. Une observation n'est pas une preuve : il est temps de démontrer.

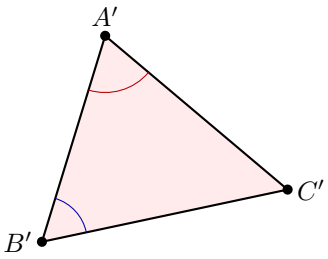
Propriété 1 : Caractérisation angulaire

Démonstration

On se donne deux triangles ABC et $A'B'C'$ dont les angles en A et A' sont égaux, et les angles en B et B' aussi. On veut montrer que leurs côtés sont proportionnels.



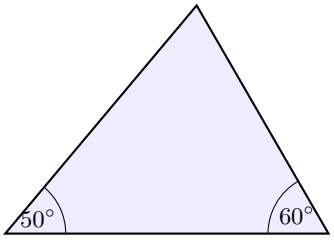
Le triangle ABC, et le report $AM = A'B'$



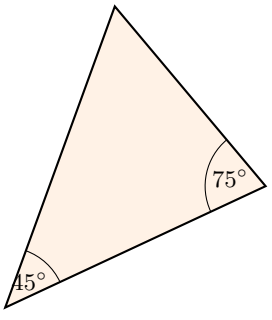
Le triangle $A'B'C'$, donné

À gauche, le triangle ABC où l'on a reporté $AM = A'B'$; à droite, le triangle donné

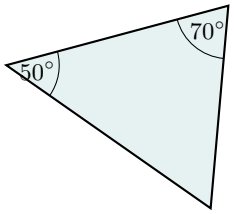
Exercice — Semblables ou non ?



Triangle 1



Triangle 2



Triangle 3

Trois triangles, dont on ne connaît que deux angles

1. Calcule le troisième angle de chacun des trois triangles.
2. Parmi ces trois triangles, lesquels sont semblables ? Justifie.
3. Le triangle qui reste pourrait-il devenir semblable aux autres si on modifiait une seule de ses mesures d'angle ? Laquelle, et comment ?

Exercice — Deux angles suffisent

Dans chaque cas, dis si l'on peut affirmer que les deux triangles sont semblables, et pourquoi.

a. $\widehat{A} = 55°$, $\widehat{B} = 45°$; $\widehat{D} = 55°$, $\widehat{E} = 80°$

b. $\widehat{A} = 30°$, $\widehat{B} = 90°$; $\widehat{D} = 90°$, $\widehat{F} = 60°$

c. $\widehat{A} = 62°$; $\widehat{D} = 62°$

d. ABC est équilatéral, DEF est équilatéral

Exercice — Écrire la conclusion en entier

Les triangles RST et KLM ont leurs angles égaux deux à deux : l'angle en R égale celui en L, l'angle en S celui en M, l'angle en T celui en K.
On donne $RS = 4$ cm, $ST = 6$ cm, $TR = 5$ cm et $LM = 10$ cm.

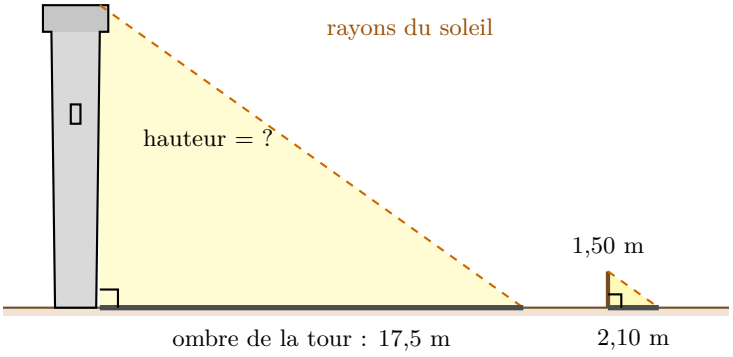
1. Écris les trois quotients égaux, en respectant l'appariement des sommets.
2. Calcule le rapport, puis les deux longueurs manquantes du triangle KLM.

Séance 3 — Calculer une longueur inaccessible

Objectif : Calculer une longueur inaccessible en utilisant deux triangles semblables

Activité — Mesurer sans monter

Une tour génoise se dresse au bord de la mer. On ne peut ni y monter ni tendre un décamètre le long de sa paroi. Un jour de plein soleil, on mesure l'ombre de la tour au sol : $17{,}5$ m. Au même moment, un bâton planté bien vertical, de $1{,}50$ m de haut, projette une ombre de $2{,}10$ m.

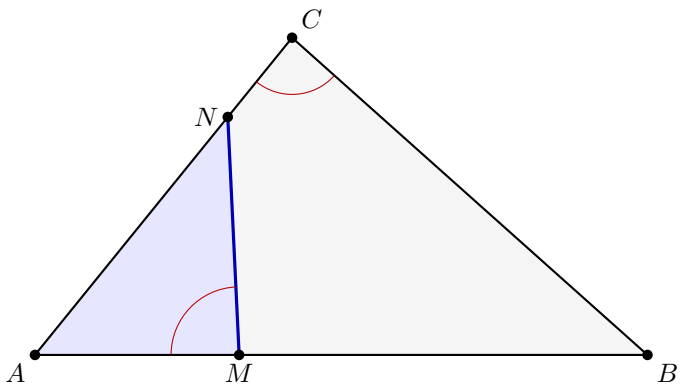


La tour, le bâton, et leurs deux ombres

1. Pourquoi les deux rayons de soleil dessinés sont-ils parallèles ?
2. Repère les deux triangles rectangles de la figure. Montre qu'ils ont leurs angles égaux deux à deux.
3. Range les côtés de chaque triangle et écris les quotients égaux.
4. Calcule la hauteur de la tour.

Exercice — Un angle commun

Sur la figure, M est un point de $[AB]$ et N un point de $[AC]$. Les angles $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux.



$AB = 9$ cm $\quad AC = 6$ cm $\quad BC = 7$ cm $\quad AM = 3$ cm

Les deux angles marqués en rouge sont égaux.

La configuration à angle commun

1. Quel angle les triangles AMN et ACB ont-ils en commun ?
2. Démontre que les triangles AMN et ACB sont semblables.
3. Recopie et complète, en respectant l'appariement des sommets : $\frac{AM}{\ldots} = \frac{AN}{\ldots} = \frac{MN}{\ldots}$
4. Calcule AN, puis MN.

Exercice — La copie de Léa

Voici ce que Léa a écrit à la question 4 de l'exercice précédent :

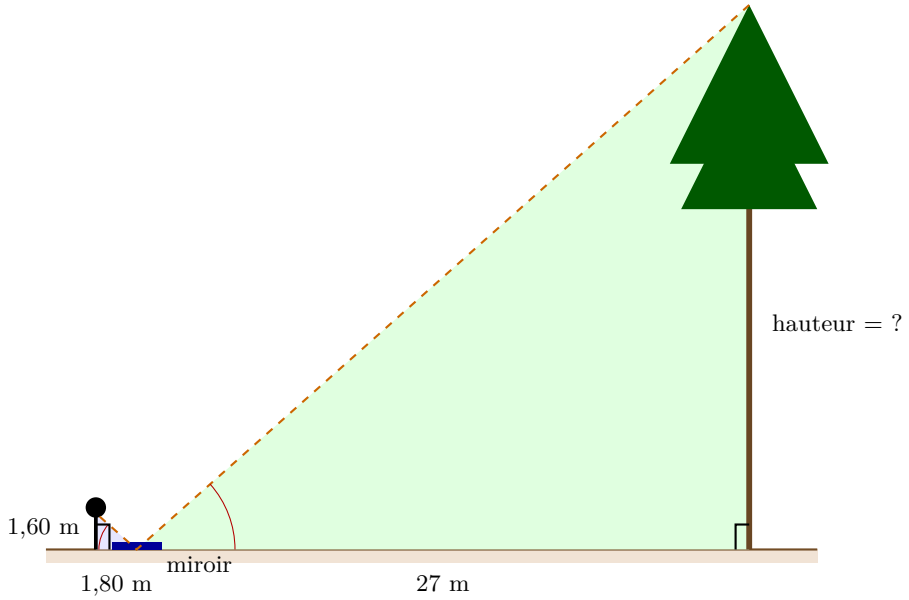
> Les triangles AMN et ACB sont semblables.
> Donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, c'est-à-dire $\frac{3}{9} = \frac{AN}{6}$.
> Donc $AN = \frac{3\times 6}{9} = 2$ cm.

1. Le raisonnement de Léa est-il correct ? Si ce n'est pas le cas, où exactement est l'erreur ?
2. S'il y a une erreur, explique ce qui a pu la conduire à écrire cela.

Exercice — Le miroir posé au sol

Pour mesurer un pin laricio sans l'abattre, on pose un petit miroir à plat sur le sol, puis on recule jusqu'à voir le sommet de l'arbre dans le miroir. La lumière se réfléchit alors en faisant deux angles

égaux avec le sol.



Le miroir, l'observatrice et l'arbre

Fatima a les yeux à $1{,}60$ m du sol. Elle se place à $1{,}80$ m du miroir, et le miroir est à 27 m du pied de l'arbre.

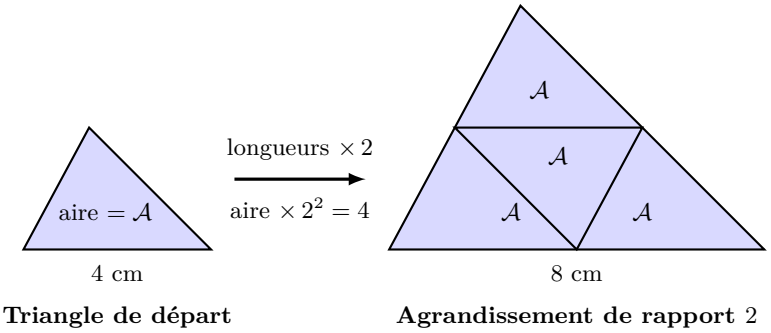
1. Démontre que les deux triangles rectangles de la figure sont semblables.
2. Calcule la hauteur de l'arbre.
3. Fatima recule d'un mètre, sans que l'arbre ni son regard ne changent de hauteur. Dans quel sens doit-elle déplacer le miroir, et de combien ?

Séance 4 — Le rapport, les aires, et le bilan

Objectif : Utiliser le rapport de similitude et son effet sur les longueurs et les aires

Passer d'un triangle à un triangle semblable, c'est multiplier toutes les longueurs par un même nombre : c'est donc une situation de proportionnalité. Les aires, elles, ne suivent pas la même règle.

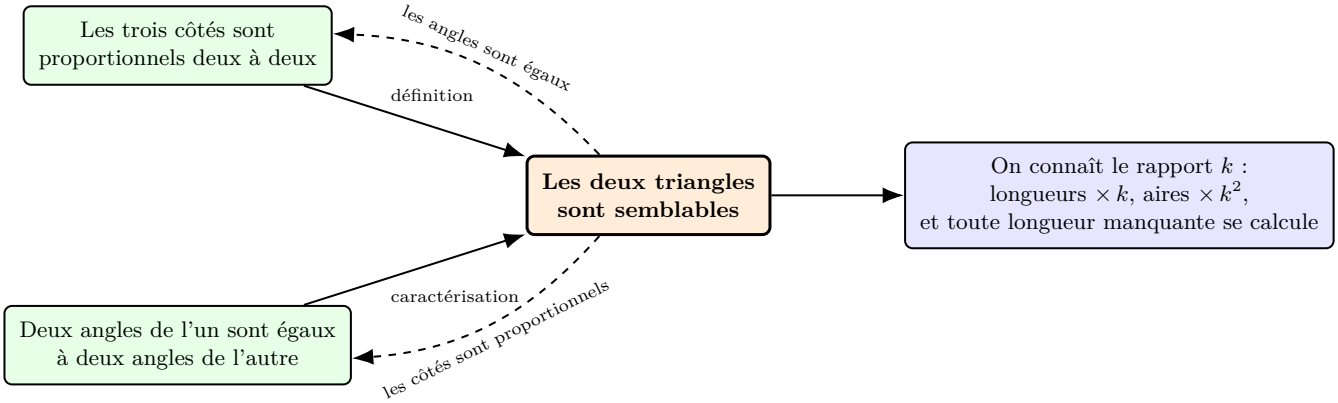
Propriété 2 : Ce que multiplie le rapport



Triangle de départ **Agrandissement de rapport 2**

Un agrandissement de rapport 2 se découpe exactement en quatre triangles de départ

Bilan de la séquence



Les deux entrées possibles, et ce qu'elles permettent ensuite

Exercice — Deux triangles, une aire

Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables, et l'on passe du premier au second avec un rapport de $2{,}5$. L'aire du triangle ABC vaut 12 cm^2.

1. Le côté $[AB]$ mesure 6 cm. Combien mesure $[A'B']$?
2. Le périmètre de ABC vaut 19 cm. Quel est celui de $A'B'C'$?
3. Quelle est l'aire de $A'B'C'$?
4. Yanis répond 30 cm^2 à la question 3. A-t-il raison ? Explique en une phrase.

Exercice — Du plan au terrain

Sur le plan d'une commune, dessiné à l'échelle $1/500$, une parcelle triangulaire a une aire de 12 cm^2.

1. Par quel nombre faut-il multiplier les longueurs du plan pour obtenir les longueurs réelles ?
2. Par quel nombre faut-il donc multiplier les aires ?
3. Calcule l'aire réelle de la parcelle, en mètres carrés.

Exercice — Vrai ou faux

Pour chaque affirmation, réponds par vrai ou faux et justifie en une phrase.

a. Deux triangles équilatéraux sont toujours semblables.

b. Deux triangles rectangles sont toujours semblables.

c. Deux triangles isocèles ayant un angle de $40°$ sont toujours semblables.

d. Si deux triangles sont semblables de rapport 1, alors ils sont superposables.

e. Un triangle et son agrandissement ont le même périmètre.

Entraînement en ligne

Ces exercices sont générés au hasard : on peut les refaire autant de fois que nécessaire, la correction est immédiate.

> **La note ne compte pour le bonus que si l'on est connecté.** En ouvrant un exercice par l'un des liens ci-dessous, on s'entraîne librement, mais rien n'est enregistré. Pour que le travail compte, il faut passer par la classe sur WIMS et ouvrir la feuille de la séquence.

- Obj. 1.1 Trois rapports pour décider
- Obj. 1.2 Ranger les côtés avant de conclure
- Obj. 2.1 Apparier les sommets
- Obj. 3.1 Deux angles égaux suffisent
- Obj. 4.1 Pourquoi deux angles suffisent
- Obj. 5.1 Mesurer l'inaccessible
- Obj. 6.1 Le rapport appliqué aux longueurs et aux aires