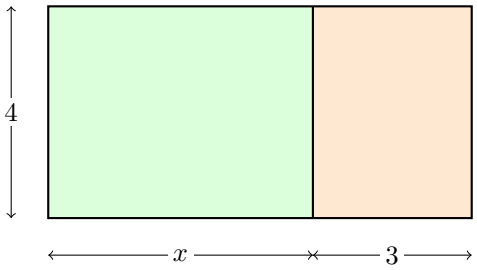
# Développements

## Activité de découverte — Le jardin partagé

**Activité — Une planche qu'on agrandit deux fois**

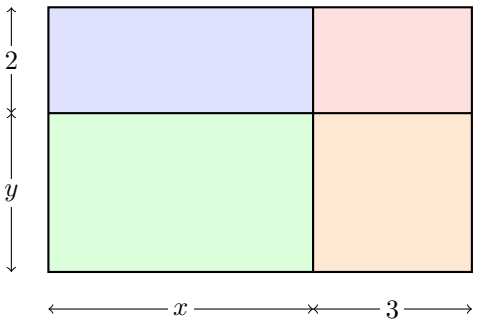
Dans le jardin partagé du quartier, une planche de culture rectangulaire mesure $4$ m de large et $x$ m de long. On l'allonge de $3$ m.




La planche allongée de 3 m

1. Écris l'aire de la nouvelle planche de deux façons : comme le produit de ses deux dimensions, puis comme la somme des deux morceaux. Quelle propriété permet de passer d'une écriture à l'autre ?

L'année suivante, on agrandit dans les deux sens. La planche mesure $x$ m de long et $y$ m de large ; on l'allonge de $3$ m et on l'élargit de $2$ m.




La planche agrandie dans les deux sens

2. Écris l'aire totale de deux façons : comme un produit, puis comme la somme

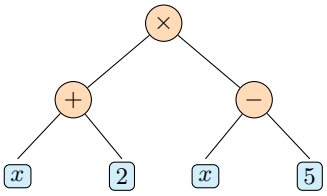
des quatre morceaux. Vérifie tes deux écritures avec $x = 5$ et $y = 3$.

3. Essaie d'obtenir la somme **à partir du produit, par le calcul**, en n'utilisant que la propriété de la question 1. Que se passe-t-il ?
4. Programme A : **choisis un nombre, ajoute** $5$**, multiplie le résultat par le nombre choisi augmenté de** $2$**.** Programme B : **choisis un nombre, multiplie-le par lui-même, ajoute** $7$ **fois le nombre choisi, puis ajoute** $10$**.** Applique les deux programmes à $3$, à $0$ et à $-1$. Peux-tu être sûr qu'ils donnent toujours le même résultat ?

# Séance 1 — Lire une expression avant de la transformer

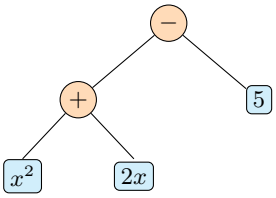
**Objectif :** Reconnaître si une expression littérale est une somme ou un produit, et écrire son opposé

$(x+2)(x-5)$




c'est un **produit**

$x^2+2x-5$




c'est une **somme**

développer transforme la première en la seconde ; factoriser fait l'inverse

La dernière opération dit la nature de l'expression

**Définition 1 : Somme ou produit**

| Expression | Nature | Ses termes ou ses facteurs |
|---|---|---|
| $3x+5$ | _____ | les termes $3x$ et $5$ |
| $3(x+5)$ | _____ | les facteurs $3$ et $x+5$ |
| $(x+2)(x+7)$ | _____ | les facteurs $x+2$ et $x+7$ |
| $x^2+5x+6$ | _____ | les termes $x^2$, $5x$ et $6$ |

## Propriété 1 : Réduire une somme

## Propriété 2 : Opposé d'une expression

**ce qu'il faut faire**

$$-(3x-7)$$
$$-3x+7$$

les **deux** signes ont changé : c'est l'opposé de *chacun* des termes

**l'erreur**

$$-(3x-7)$$
$$-3x-7$$

oublié

seul le premier signe a changé : le résultat est faux

**le contrôle** — on essaie une valeur : pour $x=1$,
$-(3-7)=-(-4)=4$, et $-3+7=4$ ; $-3-7=-10$ ne convient pas

prendre l'opposé d'une somme, c'est prendre l'opposé de **chacun** de ses termes.
Un signe moins devant une parenthèse change **tous** les signes à l'intérieur, pas seulement le premier.

**Un signe moins change tous les signes**

**Propriété 3 : Distributivité simple**

**Exemple — Trois développements simples**

$3(x+4) = 3x+12$

$-2(x-5) = -2x+10$

$-4x(6-3x) = -24x+12x^2$

Commencés en classe, terminés à la maison, corrigés en ouverture de la séance 2.

**Exercice — Somme ou produit ?**

Pour chaque expression, dis s'il s'agit d'une somme ou d'un produit, et donne ses termes ou ses facteurs.

**a.** $7x-2$ **c.** $(x-4)(x+9)$ **e.** $2x(x+6)$

**b.** $5(2x+1)$ **d.** $x^2-3x+1$ **f.** $2x+x(x+6)$

**Exercice — Réduire**

Écris chaque expression le plus simplement possible. Lorsque ce n'est pas possible, explique pourquoi.

**a.** $6x+9x$ **c.** $5x^2-2x^2+7$ **e.** $x \times x$

**b.** $6x+9x^2$ **d.** $4+3x-9+x$ **f.** $3x \times 2x$

**Exercice — Enlever une parenthèse**

Écris chaque expression sans parenthèses, puis réduis.

**a.** $-(2x+5)$ **c.** $8-(x+2)$ **e.** $3(2x+1)-(6-x)$

**b.** $-(4x-3)$ **d.** $5-(2x-3)$

**Exercice — Développer, comme en 4e**

**Développe et réduis si possible.**

**a.** $4(x+7)$

**b.** $-3(x-2)$

**c.** $x(2x+5)$

**d.** $-2x(3-x)$

**e.** $5(x+1)+2(x-4)$

# Séance 2 — La double distributivité

**Objectif :** Développer un produit de deux sommes, puis réduire ; Justifier la double distributivité à partir de la distributivité simple

## Mise en commun de l'activité

L'activité s'est arrêtée sur un résultat et un manque :

> Le découpage du rectangle donne $(x+3)(y+2) = xy + 2x + 3y + 6$.
>
> Aucun calcul connu ne permet de le retrouver, et les deux programmes de calcul restent une coïncidence constatée sur trois nombres.

**Théorème — Propriété 4 : Double distributivité**



**Exemple — Deux développements, pas à pas**

$$(x+3)(x+2) = x \times x + x \times 2 + 3 \times x + 3 \times 2$$
$$= x^2 + 2x + 3x + 6$$
$$= x^2 + 5x + 6$$

$$(2x+1)(x+5) = 2x \times x + 2x \times 5 + 1 \times x + 1 \times 5$$
$$= 2x^2 + 10x + x + 5$$
$$= 2x^2 + 11x + 5$$

La ligne du milieu, celle des quatre produits, s'écrit **toujours**. C'est elle qu'on relit quand le résultat est faux.

**Exemple — Les deux questions de l'activité, enfin résolues**

La planche du jardin : $(x+3)(y+2) = xy + 2x + 3y + 6$. Les quatre termes sont les quatre morceaux du rectangle, et aucun ne se réduit — ils ne sont pas semblables. Le programme A : $(x+5)(x+2) = x^2 + 2x + 5x + 10 = x^2 + 7x + 10$, qui est exactement l'expression du programme B. Les deux programmes donnent donc le même résultat pour **tous** les nombres, et non pour les trois essayés.

**Exercice — Développer et réduire**

**a.** $(x+1)(x+4)$ **b.** $(x+6)(x+2)$ **c.** $(2x+3)(x+5)$ **d.** $(3x+1)(2x+7)$

**Exercice — Retrouver le produit de départ**

Voici deux sommes de quatre produits, écrites sans être réduites. Retrouve, pour chacune, le produit de deux parenthèses dont elle vient.

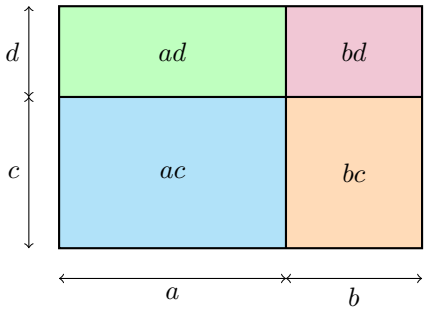
**a.** $x^2 + 7x + 2x + 14$

**b.** $3x^2 + 12x + x + 4$

# Séance 3 — Développer et réduire, quand il y a des signes

**Objectif :** Développer un produit de deux sommes, puis réduire

## Méthode




$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
quatre morceaux, quatre produits

**Quatre morceaux, quatre produits**

**Exemple — Trois cas, du plus simple au plus piégeux**

**Un terme négatif.**

$$(x-3)(x+4) = x^2 + 4x - 3x - 12$$
$$= x^2 + x - 12$$

**Deux termes négatifs.** Le dernier produit devient positif : $(-5) \times (-2) = 10$.

$$(2x-5)(3x-2) = 6x^2 - 4x - 15x + 10$$
$$= 6x^2 - 19x + 10$$

**Un terme négatif en tête.**

$$(-x+4)(2x-1) = -2x^2 + x + 8x - 4$$
$$= -2x^2 + 9x - 4$$

### Exercice — Développer et réduire

**a.** $(x-2)(x+5)$ **c.** $(x-4)(x-6)$ **e.** $(3x+2)(2x-5)$

**b.** $(x+3)(x-7)$ **d.** $(2x-3)(5x+7)$ **f.** $(-2x+1)(x-4)$

### Exercice — Développer, puis vérifier

Développe et réduis, puis vérifie ton résultat en remplaçant $x$ par $2$ dans l'expression de départ et dans ton résultat.

**a.** $(x-1)(x+6)$

**b.** $(3x-2)(x-5)$

### Exercice — Plusieurs opérations

Développe et réduis.

**a.** $(x+2)(x+3)-x^2$

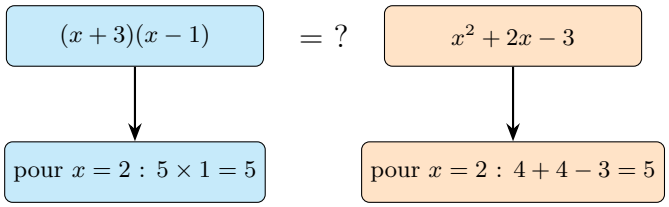
**b.** $(x-1)(x+4)+2(x+3)$

**c.** $(2x+1)(x-3)-2x(x+1)$

# Séance 4 — Atelier d'erreurs, et le contrôle numérique

**Objectif :** Contrôler un développement en remplaçant la lettre par un nombre

## Le contrôle numérique




les deux donnent 5 : la transformation résiste au test

un test réussi ne démontre rien — un test raté prouve l'erreur

**Substituer la même valeur aux deux écritures**

**Exercice — Trouver, nommer, corriger**

Quatre élèves rendent les calculs suivants. **Tous les quatre sont faux.**

**Inès :** $(x+3)(x+2)=x^2+6$

**Karim :** $(x-3)(x+4)=x^2+4x-3x+12=x^2+x+12$

**Léna :** $(2x+1)(x-3)-2x(x+1)=2x^2-5x-3-2x^2+2x=-3x-3$

**Tom :** $(x+5)(x+2)=x^2+7x+10=8x+10$

1. Recopie et complète ce tableau. Pour chaque copie, calcule la valeur du produit de départ et celle du résultat de l'élève, pour $x=2$.

| Élève | Départ, pour $x=2$ | Résultat de l'élève, pour $x=2$ | Égaux ? |
|---|---|---|---|
| Inès | … | … | … |
| Karim | … | … | … |
| Léna | … | … | … |
| Tom | … | … | … |

2. Le contrôle numérique a-t-il repéré les quatre erreurs ?
3. Pour chacune, dis en une phrase **quelle** erreur a été commise. Attention : ce n'est pas la même à chaque fois.
4. Récris les quatre calculs correctement.

**Exercice — Vrai ou faux, et pourquoi**

Chaque égalité est-elle vraie pour toutes les valeurs de $x$ ? Justifie, en développant ou en donnant un contre-exemple.

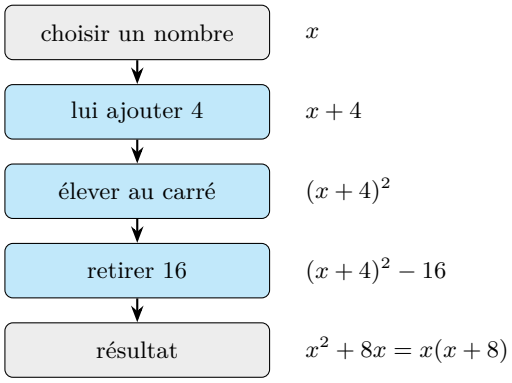
**a.** $(x+4)(x+1) = x^2+5x+4$ **c.** $3(x+2)-(x-1) = 2x+7$

**b.** $(x-2)(x-5) = x^2-7x-10$ **d.** $(x+3)(x+3) = x^2+9$

# Séance 5 — Programmes de calcul

**Objectif :** Traduire un programme de calcul par une expression littérale, et démontrer que deux programmes sont équivalents

## Méthode




la forme factorisée dit ce que le programme fait vraiment :
il multiplie le nombre choisi par lui-même augmenté de huit

**Chaque instruction transforme l'expression**

**Exemple — Un programme traduit pas à pas**

**Choisis un nombre.**

**Ajoute** $1$.

**Multiplie le résultat par le nombre choisi augmenté de** $3$.

**Retire le carré du nombre choisi.**

| Consigne | Expression |
|---|---|
| Choisis un nombre | $x$ |
| Ajoute $1$ | $x+1$ |
| Multiplie par le nombre augmenté de $3$ | $(x+1)(x+3)$ |
| Retire le carré du nombre choisi | $(x+1)(x+3)-x^2$ |

**On développe :**

$$(x+1)(x+3)-x^2=x^2+3x+x+3-x^2$$

$$=4x+3$$

**Le programme revient donc à multiplier par $4$ et ajouter $3$, ce que rien dans son énoncé ne laissait deviner.**

### Exercice — Traduire et réduire

Traduis chaque programme par une expression, puis développe et réduis.

**Programme 1** : choisis un nombre ; ajoute $2$ ; multiplie le résultat par le nombre choisi augmenté de $6$.

**Programme 2** : choisis un nombre ; retire $5$ ; multiplie le résultat par le double du nombre choisi ; ajoute $10$ fois le nombre choisi.

### Exercice — Deux programmes équivalents

**Programme C** : choisis un nombre ; ajoute $4$ ; multiplie le résultat par le nombre choisi diminué de $1$.

**Programme D** : choisis un nombre ; multiplie-le par lui-même ; ajoute le triple du nombre choisi ; retire $4$.

1. Applique les deux programmes à $5$, puis à $-2$.
2. Démontre qu'ils donnent le même résultat pour **tous** les nombres.

### Exercice — Un programme qui ne dépend de rien

**Programme E** : choisis un nombre ; ajoute $3$ ; multiplie le résultat par le nombre choisi augmenté de $1$ ; retire le carré du nombre choisi ; retire enfin $4$ fois le nombre choisi.

1. Applique-le à trois nombres de ton choix.
2. Explique ce que tu observes.

### Exercice — Non équivalents, et le prouver

**Programme F** : choisis un nombre ; ajoute $2$ ; multiplie le résultat par le nombre choisi augmenté de $3$.

**Programme G** : choisis un nombre ; multiplie-le par lui-même ; ajoute $5$ fois le nombre choisi ; ajoute $5$.

Ces deux programmes sont-ils équivalents ? Justifie de deux façons différentes.

# Séance 6 — Démontrer avec des lettres

**Objectif :** Démontrer une conjecture numérique à l'aide du calcul littéral

### Activité — D'un carré au suivant

1. Calcule $2^2 - 1^2$, puis $3^2 - 2^2$, $4^2 - 3^2$ et $5^2 - 4^2$.
2. Quel point commun ont ces quatre résultats ? Formule une conjecture sur la différence des carrés de deux entiers consécutifs.
3. Ta conjecture tient-elle pour $11^2 - 10^2$ ? Ces cinq essais suffisent-ils pour être sûr qu'elle est vraie pour tous les entiers ?
4. Comment écrire deux entiers consécutifs sans choisir leur valeur ?

### Exercice — Les deux voisins

On appelle **voisins** d'un nombre entier les deux entiers qui l'encadrent : les voisins de $7$ sont $6$ et $8$.

1. Calcule le produit des voisins de $7$, puis de $10$, puis de $5$. Compare chaque fois avec le carré du nombre de départ.
2. Formule une conjecture.
3. Démontre-la.

### Exercice — Deux entiers qui se suivent

1. Prends deux entiers consécutifs, par exemple $8$ et $9$. Calcule la différence de leurs carrés, puis leur somme. Recommence avec deux autres.
2. Formule une conjecture.
3. Démontre-la.

### Exercice — Une conjecture qui tombe

Un élève affirme : **la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de** $6$.

1. Vérifie avec $1$, $2$, $3$. Puis avec $2$, $3$, $4$.
2. Que peux-tu conclure ?
3. Démontre ce qui est vrai de cette somme.

**Exercice — Le potager qu'on déforme**

Un potager carré mesure $x$ mètres de côté. On l'allonge de $3$ m dans un sens et on le raccourcit de $3$ m dans l'autre.

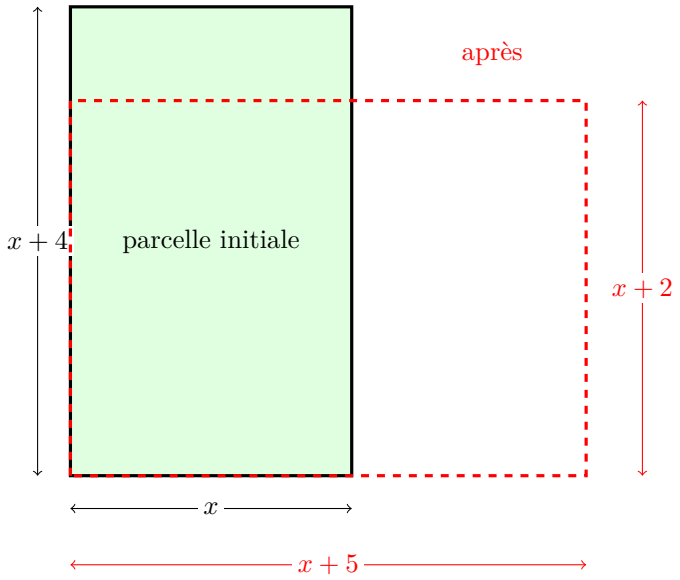
1. Écris l'aire du potager de départ, puis celle du nouveau potager.
2. Le nouveau potager a-t-il la même aire ? Justifie.
3. De combien l'aire a-t-elle changé ? Cette réponse dépend-elle de $x$ ?

# Séance 7 — Mettre un problème en équation

**Objectif :** Mettre un problème en équation à l'aide d'un développement, et résoudre l'équation obtenue

## Le problème

Une parcelle rectangulaire mesure $x$ mètres de large et $x+4$ mètres de long. On l'agrandit de $5$ m dans la largeur et on la raccourcit de $2$ m dans la longueur. L'aire augmente alors de $40$ m².




La parcelle avant et après

Quelle était la largeur de la parcelle de départ ? Chaque rangée essaie une largeur : calcule l'aire de départ, la nouvelle aire et l'augmentation.

**Exemple — La parcelle, avec 47,5 m²**

**Choisir l'inconnue.** $x$ : largeur de départ (en m).

**Traduire.** Aires : $x(x+4)$, puis $(x+5)(x+2)$.

$$(x+5)(x+2) = x(x+4) + 47{,}5$$

**Résoudre.**

$$x^2 + 7x + 10 = x^2 + 4x + 47{,}5$$

$$7x + 10 = 4x + 47{,}5$$

$3x = 37{,}5$

$x = 12{,}5$

**Vérifier dans l'énoncé, conclure.** $17{,}5 \times 14{,}5 - 12{,}5 \times 16{,}5 = 253{,}75 - 206{,}25 = 47{,}5$. La parcelle de départ mesurait $12{,}5$ m de large.

### Exercice — Résoudre

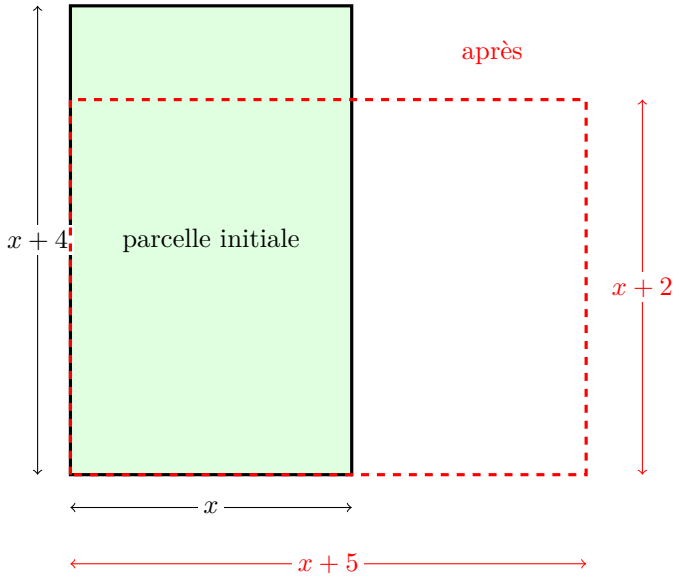
**a.** $(x+2)(x+5) = (x+1)(x+4)$

**b.** $(x-3)(x+4) = (x+2)(x-1)$

**c.** $(2x+1)(x+3) = 2x(x+4)$

### Exercice — La parcelle qu'on remodèle

Une parcelle rectangulaire mesure $x$ mètres de large et $x+4$ mètres de long. On l'agrandit de $5$ m dans la largeur et on la raccourcit de $2$ m dans la longueur. L'aire augmente alors de $40$ m².




La parcelle avant et après

Quelle était la largeur de la parcelle de départ ?

### Exercice — Régler un programme de calcul

On reprend le programme de la séance 5 :

Choisis un nombre ; ajoute $1$ ; multiplie le résultat par le nombre choisi

augmenté de $3$ ; retire le carré du nombre choisi.

Pour quel nombre ce programme donne-t-il $27$ ?

**Exercice — Même aire**

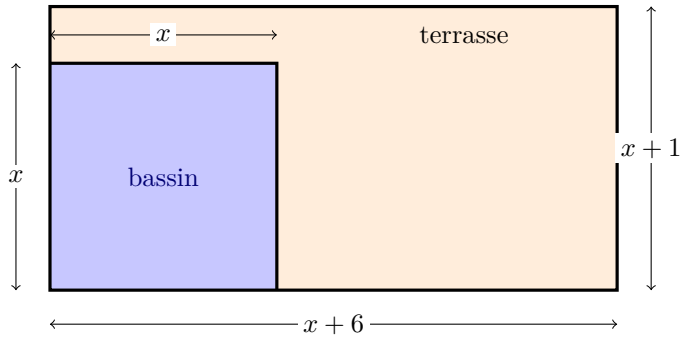
Un rectangle a pour dimensions $x+7$ et $x+2$. Un carré a pour côté $x+4$.
Pour quelle valeur de $x$ ont-ils la même aire ?

# Séance 8 — Aires, et les produits qui se simplifient

**Objectif :** Exprimer une aire par une expression littérale, et la développer

### Exercice — La terrasse et son bassin

Une terrasse rectangulaire mesure $x+6$ mètres sur $x+1$ mètres. On y creuse un bassin carré de côté $x$ mètres, dans un coin.




La terrasse, et le bassin creusé dans un coin

1. Exprime l'aire de la terrasse, puis celle du bassin.
2. Exprime l'aire de la surface restante, sous forme développée et réduite.
3. Contrôle ton résultat pour $x=4$.

### Exercice — Le cadre

Une photo carrée de côté $x$ cm est entourée d'un cadre de $2$ cm de large sur tout le pourtour.

1. Quelles sont les dimensions de l'ensemble photo + cadre ?
2. Exprime l'aire du cadre seul, développée et réduite.
3. Pour quelle valeur de $x$ le cadre a-t-il une aire de $80$ cm² ?

### Exercice — Deux figures qui se ressemblent

Un rectangle a pour dimensions $x+8$ et $x+2$. Un carré a pour côté $x+5$.

1. Développe et réduis l'aire de chacun.
2. Laquelle est la plus grande ? L'écart dépend-il de $x$ ?
3. Compare aussi les périmètres.

**Exercice — Quand le milieu disparaît**

**Développe et réduis.**

**a.** $(x+5)(x-5)$

**b.** $(x+7)(x-7)$

**c.** $(3x+2)(3x-2)$

**1. Que remarques-tu à chaque fois ?**

**2. Sans faire le calcul, devine le résultat de** $(x+11)(x-11)$**.**

# Séance 9 — QCM bilan et préparation à l'évaluation

**Objectif :** Faire le point avant l'évaluation

## Fiche de révision




on développe pour comparer ou pour calculer ;
on factorise pour résoudre ou pour lire une propriété

Les deux sens du chapitre

**Exercice type**

**Partie 1.** Développe et réduis.

a. $(x+7)(x+2)$

b. $(x-4)(x+3)$

c. $(3x-1)(2x-5)$

**Partie 2.** Développe et réduis $(x+5)(x-1)-x(x+4)$.

**Partie 3.** Un programme de calcul : choisis un nombre ; ajoute $3$ ; multiplie le résultat par le nombre choisi diminué de $1$ ; retire le carré du nombre choisi.

1. Applique-le à $4$.
2. Démontre que ce programme revient à multiplier par $2$ et à retirer $3$.
3. Pour quel nombre donne-t-il $11$ ?

## Entraînement en ligne

Ces exercices sont générés au hasard : on peut les refaire autant de fois que nécessaire, la correction est immédiate.

> **La note ne compte pour le bonus que si l'on est connecté.** En ouvrant un exercice par l'un des liens ci-dessous, on s'entraîne librement, mais rien

n'est enregistré. Pour que le travail compte, il faut passer par la classe sur WIMS et ouvrir la feuille de la séquence.

- Obj. 1.1 Somme ou produit ?
- Obj. 1.2 Le signe devant la parenthèse
- Obj. 2.1 Les quatre produits
- Obj. 2.2 Développer avec des signes
- Obj. 2.3 Développer avec des coefficients
- Obj. 3.1 Démontrer la double distributivité
- Obj. 4.1 Contrôler un développement
- Obj. 5.1 Deux programmes de calcul
- Obj. 6.1 Deux entiers consécutifs