Développements

1 Séance 6 — Démontrer avec des lettres

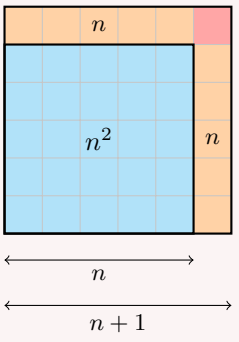
Activité — D'un carré au suivant

1. Calcule $2^2 - 1^2$, puis $3^2 - 2^2$, $4^2 - 3^2$ et $5^2 - 4^2$.
2. Quel point commun ont ces quatre résultats ? Formule une conjecture sur la différence des carrés de deux entiers consécutifs.
3. Ta conjecture tient-elle pour $11^2 - 10^2$? Ces cinq essais suffisent-ils pour être sûr qu'elle est vraie pour tous les entiers ?
4. Comment écrire deux entiers consécutifs sans choisir leur valeur ?

1. $4 - 1 = 3$, puis $9 - 4 = 5$, $16 - 9 = 7$ et $25 - 16 = 9$.
2. Les quatre résultats sont **impairs**. *La différence des carrés de deux entiers consécutifs est un nombre impair.*
3. $121 - 100 = 21$, impair encore. Mais cinq essais ne disent rien des autres entiers : pour en être sûr, il faut une démonstration.
4. On appelle n le premier ; le suivant est alors $n + 1$.

$$\begin{aligned}(n+1)^2 - n^2 &= (n+1)(n+1) - n^2 \\ &= n^2 + n + n + 1 - n^2 \\ &= 2n + 1\end{aligned}$$

$2n$ est pair, donc $2n + 1$ est impair : la conjecture est vraie pour tout entier n.



$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$

deux bandes de n
et un carreau

$2n$ est pair, donc
$2n + 1$ est **impair**

Ce que le carré suivant ajoute : deux bandes et un carreau

Exercice — Les deux voisins

On appelle *voisins* d'un nombre entier les deux entiers qui l'encadrent : les voisins de 7 sont 6 et 8.

1. Calcule le produit des voisins de 7, puis de 10, puis de 5. Compare chaque fois avec le carré du nombre de départ.

2. Formule une conjecture.
3. Démontre-la.

1. $6 \times 8 = 48$ et $7^2 = 49$. $9 \times 11 = 99$ et $10^2 = 100$. $4 \times 6 = 24$ et $5^2 = 25$. Chaque fois, le produit vaut 1 de moins que le carré.
2. *Le produit des deux voisins d'un nombre entier est égal au carré de ce nombre, diminué de* 1.
3. Soit n un nombre entier. Ses voisins sont $n-1$ et $n+1$.

$$\begin{aligned}(n-1)(n+1) &= n^2 + n - n - 1\\ &= n^2 - 1\end{aligned}$$

Le produit des voisins vaut donc bien $n^2 - 1$, et ce pour tout entier n.

Exercice — Deux entiers qui se suivent

1. Prends deux entiers consécutifs, par exemple 8 et 9. Calcule la différence de leurs carrés, puis leur somme. Recommence avec deux autres.
2. Formule une conjecture.
3. Démontre-la.

1. $9^2 - 8^2 = 81 - 64 = 17$, et $8 + 9 = 17$. $13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$, et $12 + 13 = 25$.
2. *La différence des carrés de deux entiers consécutifs est égale à leur somme.*
3. Soit n un entier. Les deux entiers consécutifs sont n et $n+1$.

$$\begin{aligned}(n+1)^2 - n^2 &= (n+1)(n+1) - n^2\\ &= n^2 + n + n + 1 - n^2\\ &= 2n + 1\end{aligned}$$

Or leur somme vaut $n + (n+1) = 2n + 1$. Les deux expressions sont égales, donc la conjecture est vraie pour tout entier n.

Exercice — Une conjecture qui tombe

Un élève affirme : *la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de* 6.

1. Vérifie avec 1, 2, 3. Puis avec 2, 3, 4.
2. Que peux-tu conclure ?
3. Démontre ce qui est vrai de cette somme.

1. $1 + 2 + 3 = 6$, qui est bien un multiple de 6. $2 + 3 + 4 = 9$, qui ne l'est pas.
2. La conjecture est **fausse**, et 2, 3, 4 en est un contre-exemple. Un seul suffit : il n'y a rien à ajouter.
3. Soient $n-1$, n et $n+1$ trois entiers consécutifs.

$$(n-1) + n + (n+1) = 3n$$

La somme est donc toujours un multiple de 3. Elle n'est un multiple de 6 que lorsque n est pair, ce qui n'est pas toujours le cas.

Exercice — Le potager qu'on déforme

Un potager carré mesure x mètres de côté. On l'allonge de 3 m dans un sens et on le raccourcit de 3 m dans l'autre.

1. Écris l'aire du potager de départ, puis celle du nouveau potager.
2. Le nouveau potager a-t-il la même aire ? Justifie.
3. De combien l'aire a-t-elle changé ? Cette réponse dépend-elle de x ?

1. Aire de départ : x^2. Nouvelle aire : $(x+3)(x-3)$.
2. $$\begin{aligned}(x+3)(x-3) &= x^2 - 3x + 3x - 9\\ &= x^2 - 9\end{aligned}$$
   L'aire n'est donc pas la même : elle a diminué.
3. Elle a diminué de 9 m², et cette perte **ne dépend pas de** x : quel que soit le côté du carré de départ, on perd toujours 9 m².