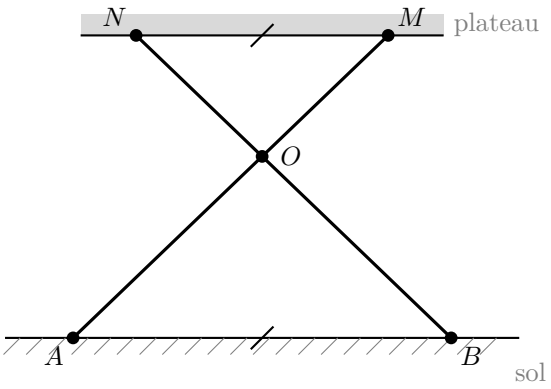
Théorème de Thalès

Activité de découverte — La table pliante

Activité — Une configuration qui ne ressemble plus à celle de l'an dernier

Une table pliante est formée de deux barres qui se croisent en O et sont fixées l'une à l'autre par un boulon. Les pieds touchent le sol en A et en B ; les extrémités hautes M et N glissent sous le plateau. Le plateau doit rester parallèle au sol.



Les deux barres croisées d'une table pliante

Rappel de 4e. Si M est sur le segment $[SA]$, N sur le segment $[SB]$ et si (MN) est parallèle à (AB), alors $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{MN}{AB}$.

1. Cite les points alignés sur la figure de la table. Le point O est-il situé entre A et M, ou bien M entre A et O ? Peut-on appliquer le rappel tel quel ?
2. Chacun sa figure, avec l'angle de son choix. Trace deux droites sécantes en O. Place A sur la première avec $OA = 6$ cm, et B sur la seconde avec $OB = 4{,}5$ cm. Sur la première droite, **de l'autre côté de** O, place M avec $OM = 4$ cm, puis trace la parallèle à (AB) passant par M : elle coupe la seconde droite en N.
3. Mesure ON, AB et MN. Calcule $\dfrac{OA}{OM}$, $\dfrac{OB}{ON}$ et $\dfrac{AB}{MN}$. Que remarques-tu ? Et sur les figures de tes voisins ?
4. Sur la table, on mesure $OA = 45$ cm, $OM = 30$ cm et $AB = 60$ cm. Quel écartement MN proposes-tu sous le plateau ? En es-tu sûr ?

Séance 1 — Du triangle emboîté au papillon

Objectif : Reconnaître une configuration papillon et vérifier que ses hypothèses sont réunies ; Énoncer le théorème de Thalès en configuration papillon et écrire ses trois rapports égaux

Mise en commun de l'activité

L'activité s'est arrêtée sur une conjecture et une gêne :

Sur toutes les figures de la classe, $\dfrac{OA}{OM} = \dfrac{OB}{ON} = \dfrac{AB}{MN}$.

Rien de tout cela n'est démontré, et la configuration de 4e ne s'applique pas.

Définition 1 : Configuration papillon

Théorème — Propriété 1 : Théorème de Thalès, configuration papillon

Cherchés à la maison, corrigés en ouverture de la séance 2.

Exercice — Reconnaître

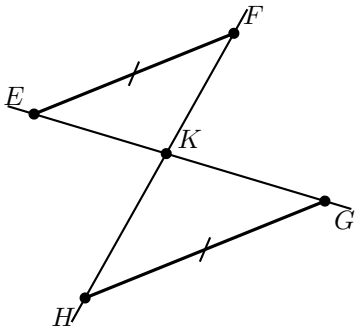


Figure 1

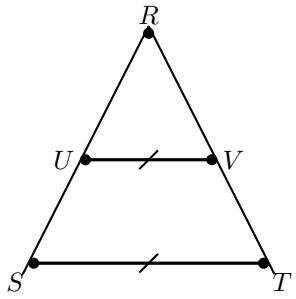


Figure 2

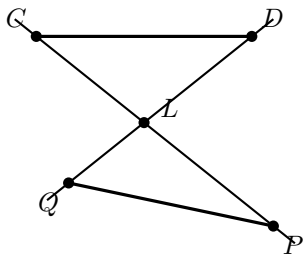


Figure 3

Trois configurations

1. Dans laquelle de ces trois figures reconnaît-on une configuration papillon ?
2. Dans laquelle le théorème de Thalès peut-il s'appliquer ? Justifie.
3. Pour celle qui reste, explique ce qui manque.

Exercice — Écrire les rapports

Sur la figure 1 de l'exercice précédent, recopie et complète les trois rapports égaux, **sans faire aucun calcul** :

$$\frac{KE}{\dots} = \frac{\dots}{KH} = \frac{\dots}{\dots}$$

Exercice — Première application

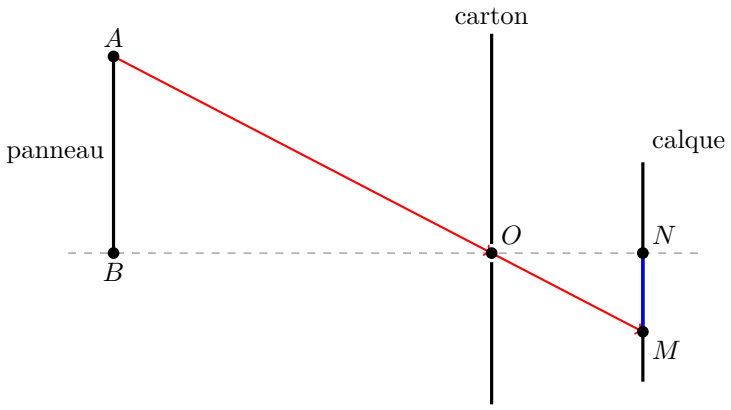
A, O, M sont alignés, B, O, N sont alignés, O est entre A et M ainsi qu'entre B et N, et $(AB) \parallel (MN)$.
On donne $OA = 4$ cm, $OM = 6$ cm et $OB = 5$ cm. Calcule ON.

Séance 2 — Calculer une longueur

Objectif : Calculer une longueur manquante dans une configuration papillon

Exemple — La chambre noire

Léa perce un petit trou dans une boîte en carton et tend une feuille de papier calque au fond. La lumière traverse le trou en ligne droite : le haut du panneau qu'elle vise se retrouve en bas de l'image.



Le panneau, le trou O, l'image sur le calque

Le panneau $[AB]$ mesure $1{,}20$ m de haut. Son pied B, le trou O et le point N du calque sont alignés : c'est l'axe de visée. Le trou est à 3 m du panneau, et le calque à $0{,}25$ m derrière le trou. Le calque est parallèle au panneau.

Quelle est la hauteur MN de l'image ?

Les points A, O, M sont alignés, les points B, O, N sont alignés, O est entre A et M ainsi qu'entre B et N, et $(AB) \parallel (MN)$. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN} \quad \text{donc} \quad \frac{3}{0{,}25} = \frac{1{,}20}{MN}$$

$$MN = \frac{0{,}25 \times 1{,}20}{3} = 0{,}10 \text{ m}$$

L'image mesure 10 cm de haut : douze fois plus petite que le panneau, comme le calque est douze fois plus près du trou.

Exercice — Quatre calculs

Dans chaque cas, A, O, M sont alignés, B, O, N sont alignés, O est entre A et M ainsi qu'entre B et N, et $(AB) \parallel (MN)$. Calcule la longueur demandée.

a. $OA = 3$ cm, $OM = 7{,}5$ cm, $OB = 4$ cm. Calculer ON.

b. $OA = 5{,}4$ cm, $OM = 3{,}6$ cm, $AB = 8{,}1$ cm. Calculer MN.

c. $OA = 2{,}5$ cm, $OB = 4$ cm, $ON = 6$ cm. Calculer OM.

d. $AB = 14$ cm, $MN = 21$ cm, $OA = 6$ cm. Calculer OM.

Exercice — Les mêmes questions, d'autres lettres

On reprend la figure 1 de la séance 1 : E, K, G sont alignés, F, K, H sont alignés, K est entre E et G ainsi qu'entre F et H, et $(EF) \parallel (GH)$.

On donne $KE = 5{,}2$ cm, $KG = 7{,}8$ cm, $KF = 4$ cm et $EF = 6{,}5$ cm.

1. Calcule KH.
2. Calcule GH.

Exercice — Le séchoir à linge

Un séchoir à linge est formé de deux barres croisées, fixées l'une à l'autre en O. Les pieds touchent le sol en A et en B ; les extrémités hautes M et N portent la barre du haut, parallèle au sol.
On mesure $OA = 52$ cm, $OM = 39$ cm et $AB = 80$ cm.
Quel est l'écartement MN des deux barres en haut ?

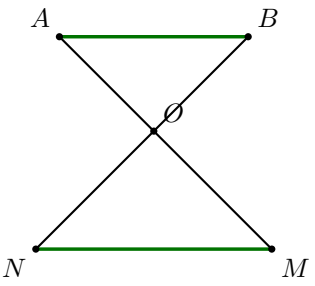
Exercice — Régler la chambre noire

Léa reprend sa boîte de l'exemple. Le panneau mesure toujours $1{,}20$ m et le trou est toujours à 3 m du panneau. Elle voudrait une image de 15 cm de haut.
À quelle distance du trou doit-elle placer le calque ?

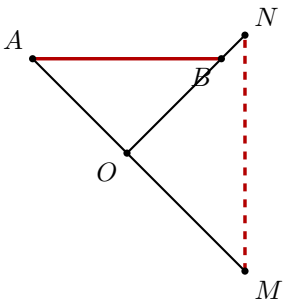
Séance 3 — La réciproque : démontrer un parallélisme

Objectif : Démontrer que deux droites sont parallèles à l'aide de la réciproque, en configuration papillon ; Démontrer que deux droites ne sont pas parallèles

Jusqu'ici, le parallélisme était **donné** et servait à calculer une longueur. On va faire l'inverse : partir des longueurs pour **démontrer** un parallélisme.



O est **entre** A et M, et entre B et N
$\dfrac{OA}{OM} = \dfrac{OB}{ON} = 0{,}8$
les droites sont parallèles

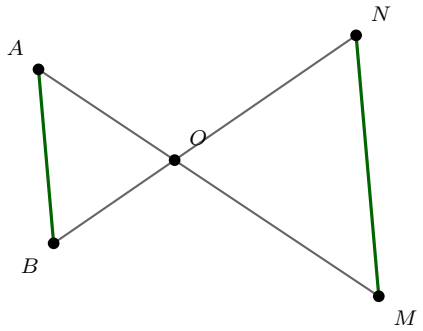


N est du **même côté** de O que B
les deux rapports valent encore $0{,}8$
et pourtant rien ne conclut

L'ordre des points décide, à rapports égaux

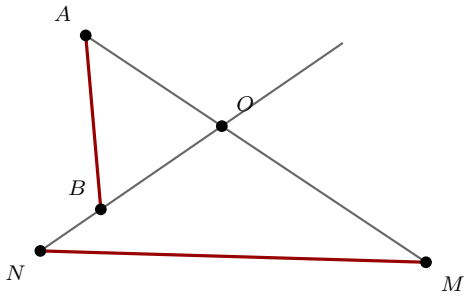
Théorème — Propriété 2 : Réciproque du théorème de Thalès, configuration papillon

O entre A et M, et entre B et N



$\dfrac{OA}{OM} = \dfrac{OB}{ON}$ et l'ordre est bon :
(AB) et (MN) sont **parallèles**

N du même côté de O que B



les rapports peuvent être égaux, et
les droites ne sont **pas** parallèles

la condition sur les rapports ne suffit pas seule : il faut **aussi** que O soit entre A et M, et entre B et N.
Vérifier l'ordre des points fait partie de la démonstration, au même titre que le calcul des deux rapports.

Les rapports ne suffisent pas : l'ordre des points aussi

Exemple — Deux cas

A, O, M sont alignés, B, O, N sont alignés, et O est entre A et M ainsi qu'entre B et N.
Cas 1. $OA = 3$ cm, $OM = 4{,}5$ cm, $OB = 4$ cm, $ON = 6$ cm.

$$\frac{OA}{OM} = \frac{3}{4{,}5} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{OB}{ON} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Les deux rapports sont égaux : d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(AB) \parallel (MN)$.
Cas 2. $OA = 3$ cm, $OM = 4{,}5$ cm, $OB = 4$ cm, $ON = 5{,}5$ cm.

$$\frac{OA}{OM} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$$
$$\frac{OB}{ON} = \frac{4}{5{,}5} \approx 0{,}727$$

Les deux rapports sont différents : les droites (AB) et (MN) ne sont pas parallèles.

Exercice — Le fabricant de tables

On reprend la table pliante de l'activité. Les deux barres mesurent 100 cm et 80 cm. Le fabricant perce le trou du boulon à 60 cm du pied sur la barre de 100 cm, et à 48 cm du pied sur la barre de 80 cm.
Le plateau sera-t-il parallèle au sol ?

Exercice — Un autre fabricant

Un concurrent utilise les mêmes barres, 100 cm et 80 cm, et perce le premier trou au même endroit, à 60 cm du pied. Mais sur la barre de 80 cm, il perce à 45 cm du pied.

Le plateau de sa table sera-t-il parallèle au sol ? Que se passera-t-il ?

Exercice — Parallèles ou non ?

Dans chaque cas, A, O, M sont alignés, B, O, N sont alignés, et O est entre A et M ainsi qu'entre B et N. Les droites (AB) et (MN) sont-elles parallèles ? Rédige ta réponse.

a. $OA = 2{,}4$ cm, $OM = 3{,}6$ cm, $OB = 3$ cm, $ON = 4{,}5$ cm.

b. $OA = 5$ cm, $OM = 7$ cm, $OB = 6$ cm, $ON = 8{,}4$ cm.

c. $OA = 4{,}2$ cm, $OM = 2{,}8$ cm, $OB = 5{,}4$ cm, $ON = 3{,}8$ cm.

Séance 4 — Théorème ou réciproque : choisir

Objectif : Choisir entre le théorème et sa réciproque, et rédiger la démonstration correspondante

Exercice — Sans calculer, dire quel outil

Dans chaque situation, dire quel outil convient — le théorème, la réciproque, ou aucun des deux — sans faire aucun calcul.

a. On sait que $(AB) \parallel (MN)$, on connaît OA, OM et OB, on cherche ON.

b. On connaît OA, OM, OB et ON, et on veut savoir si (AB) et (MN) sont parallèles.

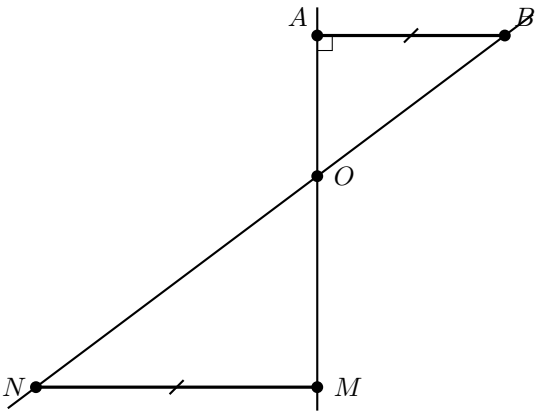
c. On sait que $(AB) \parallel (MN)$, on connaît AB, MN et OA, on cherche OM.

d. On connaît toutes les longueurs, mais les points A, O et M ne sont pas alignés.

e. On connaît OA, OM, OB et ON, et on a trouvé $\dfrac{OA}{OM} = 0{,}8$ et $\dfrac{OB}{ON} = 0{,}9$. Que peut-on affirmer ?

Exercice — L'angle droit en prime

Sur la figure, le triangle OAB est rectangle en A. Les points A, O, M sont alignés, les points B, O, N sont alignés, O est entre A et M ainsi qu'entre B et N, et $(MN) \parallel (AB)$.



Un papillon avec un angle droit

On donne $OA = 6$ cm, $AB = 8$ cm et $OM = 9$ cm.

1. Calcule OB.
2. Calcule ON, puis MN.
3. Démontre que le triangle OMN est rectangle en M.
4. Vérifie ce résultat par un calcul.

Exercice — Le portillon de l'enclos

Un portillon d'enclos est fait de deux lattes croisées, boulonnées l'une à l'autre en O. La première mesure 120 cm et le trou est percé à 72 cm d'une de ses extrémités ; la seconde mesure 90 cm et le trou est percé à 52 cm d'une de ses extrémités.
La traverse du bas relie les deux extrémités basses A et B des lattes, la traverse du haut relie les deux extrémités hautes M et N.
Ces deux traverses sont-elles parallèles ?

Exercice — Deux longueurs d'un coup

A, O, M sont alignés, B, O, N sont alignés, O est entre A et M ainsi qu'entre B et N, et $(AB) \parallel (MN)$.
On donne $OA = 4{,}8$ cm, $OM = 7{,}2$ cm, $OB = 5{,}5$ cm et $AB = 6{,}4$ cm.

1. Calcule ON et MN.
2. Par combien toutes les longueurs de l'aile OAB sont-elles multipliées pour donner celles de l'aile OMN ?

Séance 5 — Atelier d'erreurs et problèmes

Objectif : Repérer et corriger les erreurs les plus fréquentes

Exercice — Qui a raison ?

Quatre élèves travaillent sur la même figure : A, O, M sont alignés, B, O, N sont alignés, O est entre A et M ainsi qu'entre B et N. On donne $OA = 6$ cm, $OM = 4$ cm et $OB = 9$ cm, et on cherche ON.
L'énoncé précise que $(AB) \parallel (MN)$.

Salomé : *Sur ma figure, (AB) et (MN) ont l'air parallèles. Donc $\dfrac{OA}{OM} = \dfrac{OB}{ON}$ et $ON = 6$ cm.*

Noé : *D'après le théorème de Thalès, $\dfrac{OA}{ON} = \dfrac{OB}{OM}$, donc $\dfrac{6}{ON} = \dfrac{9}{4}$ et $ON = \dfrac{6 \times 4}{9} \approx 2{,}7$ cm.*

Théo : *D'après le théorème de Thalès, $\dfrac{OA}{OM} = \dfrac{OB}{ON}$, donc $ON = \dfrac{6 \times 9}{4} = 13{,}5$ cm.*

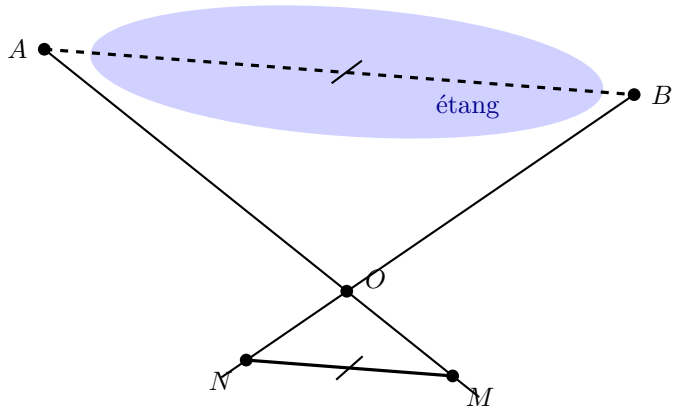
Anaïs : *Les points A, O, M sont alignés, les points B, O, N*

aussi, et $(AB) \parallel (MN)$. D'après le théorème de Thalès,
$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON}$, *donc* $\frac{6}{4} = \frac{9}{ON}$ *et*
$ON = \frac{4 \times 9}{6} = 6$ *cm.*

1. Une seule de ces quatre copies est entièrement correcte. Laquelle ?
2. Pour chacune des trois autres, dis précisément ce qui ne va pas. Attention : une copie peut donner le bon résultat et être fausse quand même.
3. Sans refaire le calcul, explique comment on pouvait voir tout de suite que $13{,}5$ cm est impossible.

Exercice — Mesurer par-dessus l'étang

Deux bornes A et B sont plantées de part et d'autre de l'étang de Biguglia. On ne peut pas mesurer AB directement : il y a l'eau entre les deux. Mais depuis un point O de la rive, on peut rejoindre A et B à pied en longeant l'eau.



La visée depuis O, et les deux piquets M et N

Une géomètre mesure $OA = 84$ m et $OB = 68$ m. Elle plante ensuite un piquet M dans le prolongement de $[AO]$ au-delà de O, avec $OM = 21$ m, et un piquet N dans le prolongement de $[BO]$ au-delà de O, avec $ON = 17$ m. Elle mesure enfin $MN = 29{,}5$ m.

1. Démontre que (MN) est parallèle à (AB).
2. Calcule la largeur AB de l'étang entre les deux bornes.
3. Pourquoi avoir choisi 21 m et 17 m, plutôt que d'autres longueurs ?

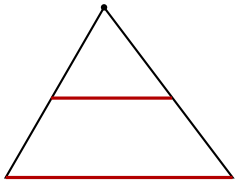
Exercice — Où percer la barre ?

Une barrière de chantier est faite de barres croisées, toutes de 90 cm, et toutes percées au même endroit. Les extrémités basses reposent au sol, les extrémités hautes portent une lisse parallèle au sol.
Le fabricant veut que l'écartement en haut soit le double de l'écartement en bas.
À quelle distance de l'extrémité basse doit-il percer le trou ?

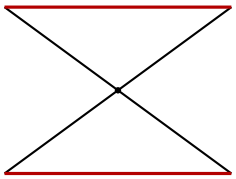
Séance 6 — QCM bilan et préparation à l'évaluation

Objectif : Faire le point avant l'évaluation

Fiche de révision



triangles emboîtés
le sommet est en dehors



configuration papillon
le sommet est entre les deux

le théorème : parallèles données → une longueur
la réciproque : longueurs données → le parallélisme, à condition que l'ordre des points soit respecté

Deux configurations, deux sens

Exercice type

E, K, G sont alignés, F, K, H sont alignés, K est entre E et G ainsi qu'entre F et H.
Partie 1. On donne $KE = 3{,}5$ cm, $KG = 5{,}6$ cm, $KF = 4$ cm et $EF = 4{,}5$ cm, et on sait que $(EF) \parallel (GH)$. Calcule KH et GH.
Partie 2. Sur une autre figure, on mesure $KE = 3{,}5$ cm, $KG = 5{,}6$ cm, $KF = 4$ cm et $KH = 6$ cm. Les droites (EF) et (GH) sont-elles parallèles ?

Entraînement en ligne

Ces exercices sont générés au hasard : on peut les refaire autant de fois que nécessaire, la correction est immédiate.

> **La note ne compte pour le bonus que si l'on est connecté.** En ouvrant un exercice par l'un des liens ci-dessous, on s'entraîne librement, mais rien n'est enregistré. Pour que le travail compte, il faut passer par la classe sur WIMS et ouvrir la feuille de la séquence.

- Obj. 1.1 Reconnaître une configuration papillon
- Obj. 2.1 Écrire les rapports de Thalès
- Obj. 2.2 Rapports et coefficient
- Obj. 3.1 Calculer une longueur avec Thalès
- Obj. 3.2 Deux câbles croisés
- Obj. 4.1 Parallèles ou pas ?
- Obj. 5.1 Que peut-on conclure ?
- Obj. 6.1 Théorème ou réciproque ?
- Obj. 6.2 Par-dessus le marais