Théorème de Thalès

1 Séance 5 — Atelier d'erreurs et problèmes

Exercice — Qui a raison ?

Quatre élèves travaillent sur la même figure : A, O, M sont alignés, B, O, N sont alignés, O est entre A et M ainsi qu'entre B et N. On donne $OA = 6$ cm, $OM = 4$ cm et $OB = 9$ cm, et on cherche ON.
L'énoncé précise que $(AB) \parallel (MN)$.

Salomé : *Sur ma figure,* (AB) *et* (MN) *ont l'air parallèles. Donc* $\dfrac{OA}{OM} = \dfrac{OB}{ON}$ *et* $ON = 6$ *cm.*

Noé : *D'après le théorème de Thalès,* $\dfrac{OA}{ON} = \dfrac{OB}{OM}$, *donc* $\dfrac{6}{ON} = \dfrac{9}{4}$ *et* $ON = \dfrac{6 \times 4}{9} \approx 2{,}7$ *cm.*

Théo : *D'après le théorème de Thalès,* $\dfrac{OA}{OM} = \dfrac{OB}{ON}$, *donc* $ON = \dfrac{6 \times 9}{4} = 13{,}5$ *cm.*

Anaïs : *Les points* A, O, M *sont alignés, les points* B, O, N *aussi, et* $(AB) \parallel (MN)$. *D'après le théorème de Thalès,* $\dfrac{OA}{OM} = \dfrac{OB}{ON}$, *donc* $\dfrac{6}{4} = \dfrac{9}{ON}$ *et* $ON = \dfrac{4 \times 9}{6} = 6$ *cm.*

1. Une seule de ces quatre copies est entièrement correcte. Laquelle ?
2. Pour chacune des trois autres, dis précisément ce qui ne va pas. Attention : une copie peut donner le bon résultat et être fausse quand même.
3. Sans refaire le calcul, explique comment on pouvait voir tout de suite que 13,5 cm est impossible.

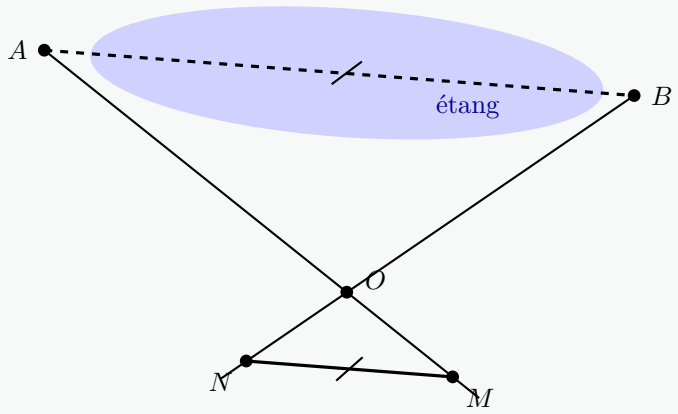
1. Celle d'**Anaïs**. Elle est la seule à énoncer les trois hypothèses avant d'utiliser le théorème, et son calcul est juste.
2. **Salomé** trouve le bon résultat, 6 cm, mais son raisonnement est faux : elle justifie le parallélisme par l'allure de la figure. Or l'énoncé le donnait — il suffisait de le citer. Un dessin ne démontre rien : deux droites qui font un angle de 1° ont l'air parallèles.

   Noé a mélangé les deux droites sécantes : OA et ON ne sont pas sur la même droite. Les rapports doivent rester chacun sur une droite : $\dfrac{OA}{OM}$ d'un côté, $\dfrac{OB}{ON}$ de l'autre.

   Théo a écrit la bonne égalité, mais il a inversé le produit en croix : de $\dfrac{6}{4} = \dfrac{9}{ON}$ on tire $6 \times ON = 4 \times 9$, donc $ON = \dfrac{4 \times 9}{6}$, et non $\dfrac{6 \times 9}{4}$.
3. OM est plus petit que OA : l'aile du bas est plus petite que celle du haut. Donc ON doit être plus petit que $OB = 9$ cm. Or $13{,}5 > 9$.

Exercice — Mesurer par-dessus l'étang

Deux bornes A et B sont plantées de part et d'autre de l'étang de Biguglia. On ne peut pas mesurer AB directement : il y a l'eau entre les deux. Mais depuis un point O de la rive, on peut rejoindre A et B à pied en longeant l'eau.



La visée depuis O, et les deux piquets M et N

Une géomètre mesure $OA = 84$ m et $OB = 68$ m. Elle plante ensuite un piquet M dans le prolongement de $[AO]$ au-delà de O, avec $OM = 21$ m, et un piquet N dans le prolongement de $[BO]$ au-delà de O, avec $ON = 17$ m. Elle mesure enfin $MN = 29{,}5$ m.

1. Démontre que (MN) est parallèle à (AB).
2. Calcule la largeur AB de l'étang entre les deux bornes.
3. Pourquoi avoir choisi 21 m et 17 m, plutôt que d'autres longueurs ?

1. Les points A, O, M sont alignés par construction, et O est entre A et M puisque M est dans le prolongement de $[AO]$ au-delà de O. De même pour B, O, N.

   $$\frac{OA}{OM} = \frac{84}{21} = 4$$
   $$\frac{OB}{ON} = \frac{68}{17} = 4$$

   Les rapports sont égaux, donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(MN) \parallel (AB)$.

2. Puisque $(MN) \parallel (AB)$, le théorème de Thalès donne $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{OA}{OM} = 4$, donc $AB = 4 \times 29{,}5 = 118$ m.

3. Pour que les deux rapports tombent sur le même nombre entier, 4 : c'est la géomètre qui choisit ses piquets, et elle les choisit pour que le calcul final soit une multiplication par 4. N'importe quel autre couple de longueurs donnant le même rapport aurait convenu — 42 m et 34 m, par exemple, pour un rapport de 2.

Exercice — Où percer la barre ?

Une barrière de chantier est faite de barres croisées, toutes de 90 cm, et toutes percées au même endroit. Les extrémités basses reposent au sol, les extrémités hautes portent une lisse parallèle au sol.
Le fabricant veut que l'écartement en haut soit le double de l'écartement en bas.
À quelle distance de l'extrémité basse doit-il percer le trou ?

Notons A et B les extrémités basses, M et N les extrémités hautes, O le trou. La lisse du haut est parallèle au sol, donc $(MN) \parallel (AB)$, et d'après le théorème de Thalès $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{OA}{OM}$.
On veut $MN = 2 \times AB$, c'est-à-dire $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{1}{2}$. Il faut donc $\dfrac{OA}{OM} = \dfrac{1}{2}$, autrement dit $OM = 2 \times OA$.
Or $OA + OM = 90$ cm, donc $OA + 2 \times OA = 90$, soit $3 \times OA = 90$ et $OA = 30$ cm.
Le trou doit être percé à 30 cm de l'extrémité basse.