Théorème de Thalès

1 Séance 4 — Théorème ou réciproque : choisir

Exercice — Sans calculer, dire quel outil

Dans chaque situation, dire quel outil convient — le théorème, la réciproque, ou aucun des deux — sans faire aucun calcul.

a. On sait que $(AB) \parallel (MN)$, on connaît OA, OM et OB, on cherche ON.

b. On connaît OA, OM, OB et ON, et on veut savoir si (AB) et (MN) sont parallèles.

c. On sait que $(AB) \parallel (MN)$, on connaît AB, MN et OA, on cherche OM.

d. On connaît toutes les longueurs, mais les points A, O et M ne sont pas alignés.

e. On connaît OA, OM, OB et ON, et on a trouvé $\dfrac{OA}{OM} = 0{,}8$ et $\dfrac{OB}{ON} = 0{,}9$. Que peut-on affirmer ?

a. Le théorème. —

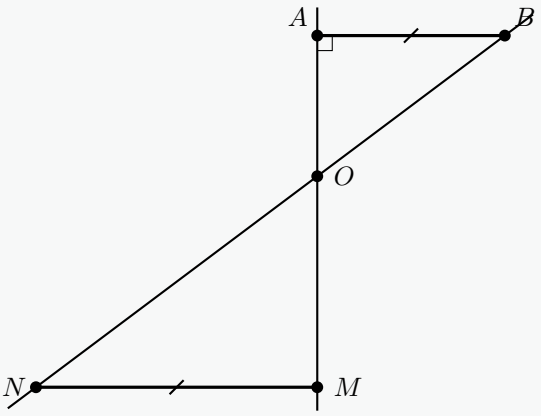
b. La réciproque. — c. Le théorème.

c. Aucun des deux : sans alignement, il n'y a pas de configuration de Thalès, quelles que soient les longueurs.

d. Les rapports sont différents, donc (AB) et (MN) ne sont pas parallèles ; c'est une conclusion, pas une absence de conclusion.

Exercice — L'angle droit en prime

Sur la figure, le triangle OAB est rectangle en A. Les points A, O, M sont alignés, les points B, O, N sont alignés, O est entre A et M ainsi qu'entre B et N, et $(MN) \parallel (AB)$.



Un papillon avec un angle droit

On donne $OA = 6$ cm, $AB = 8$ cm et $OM = 9$ cm.

1. Calcule OB.

2. Calcule ON, puis MN.
3. Démontre que le triangle OMN est rectangle en M.
4. Vérifie ce résultat par un calcul.

1. Le triangle OAB est rectangle en A, donc d'après le théorème de Pythagore : $OB^2 = OA^2 + AB^2 = 36 + 64 = 100$, d'où $OB = 10$ cm.
2. $(MN) \parallel (AB)$ dans une configuration papillon de sommet O, donc d'après le théorème de Thalès : $\dfrac{OA}{OM} = \dfrac{OB}{ON} = \dfrac{AB}{MN}$.
   $\dfrac{OA}{OM} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$, donc $ON = \dfrac{9 \times 10}{6} = 15$ cm et $MN = \dfrac{9 \times 8}{6} = 12$ cm.
3. (OA) est perpendiculaire à (AB), car le triangle OAB est rectangle en A. Or (MN) est parallèle à (AB), et si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Donc (OA) est perpendiculaire à (MN). Comme M est sur la droite (OA), le triangle OMN est rectangle en M.
4. $OM^2 + MN^2 = 81 + 144 = 225$ et $ON^2 = 15^2 = 225$. L'égalité de Pythagore est vérifiée, ce qui confirme l'angle droit en M.

Exercice — Le portillon de l'enclos

Un portillon d'enclos est fait de deux lattes croisées, boulonnées l'une à l'autre en O. La première mesure 120 cm et le trou est percé à 72 cm d'une de ses extrémités ; la seconde mesure 90 cm et le trou est percé à 52 cm d'une de ses extrémités.
La traverse du bas relie les deux extrémités basses A et B des lattes, la traverse du haut relie les deux extrémités hautes M et N.
Ces deux traverses sont-elles parallèles ?

Sur la première latte : $OA = 72$ cm et $OM = 120 - 72 = 48$ cm. Sur la seconde : $OB = 52$ cm et $ON = 90 - 52 = 38$ cm.
Les points A, O, M sont alignés et O est entre eux, de même pour B, O, N.

$$\frac{OA}{OM} = \frac{72}{48} = 1{,}5$$
$$\frac{OB}{ON} = \frac{52}{38} = \frac{26}{19} \approx 1{,}37$$

Les rapports sont différents, donc les deux traverses ne sont pas parallèles.

Exercice — Deux longueurs d'un coup

A, O, M sont alignés, B, O, N sont alignés, O est entre A et M ainsi qu'entre B et N, et $(AB) \parallel (MN)$.
On donne $OA = 4{,}8$ cm, $OM = 7{,}2$ cm, $OB = 5{,}5$ cm et $AB = 6{,}4$ cm.

1. Calcule ON et MN.
2. Par combien toutes les longueurs de l'aile OAB sont-elles multipliées pour donner celles de l'aile OMN ?

1. D'après le théorème de Thalès, $\dfrac{OA}{OM} = \dfrac{OB}{ON} = \dfrac{AB}{MN}$.
   $ON = \dfrac{7{,}2 \times 5{,}5}{4{,}8} = 8{,}25$ cm et $MN = \dfrac{7{,}2 \times 6{,}4}{4{,}8} = 9{,}6$ cm.
2. $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{7{,}2}{4{,}8} = 1{,}5$: toutes les longueurs de la petite aile sont multipliées par 1,5.