Calculs numériques

Activité de découverte — Descendre le tableau

Activité — Que peut bien valoir un exposant négatif ?

On écrit les puissances de 10 en descendant.

puissance	résultat
10^3	$1\,000$
10^2	100
10^1	10
10^0	?
10^{-1}	?
10^{-2}	?
10^{-3}	?

les trois premières lignes sont connues — les quatre suivantes se déduisent de la règle

Le tableau des puissances de dix, à prolonger

1. Les trois premières lignes du tableau sont déjà remplies : vérifie-les de tête. Comment passe-t-on d'une ligne à la suivante, du point de vue de l'**exposant** ? Et du point de vue du **résultat** ? En appliquant la même règle, quelle valeur donner à 10^0, puis à 10^{-1}, 10^{-2} et 10^{-3} ? Ces trois derniers nombres sont-ils négatifs — et qu'est-ce qui pourrait faire croire le contraire ?
2. Recommence le même travail avec la base 2, en partant de $2^3 = 8$ et jusqu'à 2^{-3}, puis avec la base 5, de 5^2 à 5^{-2}. Recopie et complète : pour un nombre a non nul, a^{-n} est l'inverse de _____, c'est-à-dire $\dfrac{1}{a^n}$.
3. On veut simplifier le quotient $\dfrac{5^3}{5^5}$. Écris 5^3 et 5^5 sous forme de produits de facteurs 5, simplifie la fraction en barrant les facteurs communs : que reste-t-il ? Écris le résultat sous forme d'une puissance de 5 à exposant négatif.

4. Recommence avec $\frac{2^2}{2^6}$. Puis, sans calculatrice, écris $\frac{10^4}{10^7}$ sous forme d'une puissance de dix, et en écriture décimale.

Séance 1 — Décimaux relatifs et racine carrée

Objectif : Calculer avec des décimaux relatifs en respectant signes et priorités ; Employer la racine carrée pour résoudre un problème, notamment géométrique

Propriété 1 : Signes d'un produit et d'un quotient

	+	−
+	+	−
−	−	+

le signe d'un produit ou d'un quotient

même signe : **positif**
signes contraires : **négatif**

1. les **parenthèses**
2. les **puissances**
3. les **multiplications** et **divisions**, de gauche à droite
4. les **additions** et **soustractions**, de gauche à droite

l'ordre des opérations

La règle des signes, et l'ordre des opérations

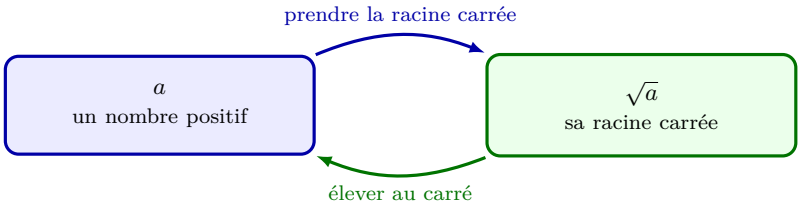
Exemple

$-3+5\times(-2)$

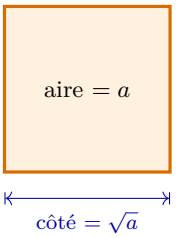
La multiplication passe avant l'addition : $5\times(-2)=-10$.

Il reste $-3+(-10)=-13$.

Définition 1 : Racine carrée



les deux opérations se défont l'une l'autre :
$(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$



$\sqrt{a}$ est le côté du carré d'aire a — d'où son nom

Ce que dit la définition de la racine carrée

Propriété 2 : Deux conséquences immédiates

Exercice — 1. Calculer avec des relatifs

Calcule, en détaillant les étapes.

a. $-3 + 5 \times (-2)$ **c.** $(-7{,}2) \div (-0{,}9)$ **e.** $(-2)^2 - 3^2$

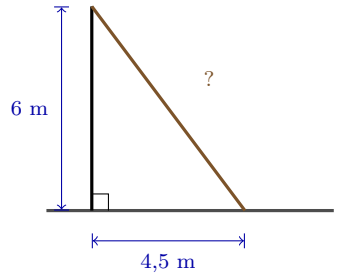
b. $(-4) \times (-2{,}5)$ **d.** $12 - (-3) \times 4$ **f.** $(-5 + 3) \times (-4)$

Exercice — 2. Racines carrées

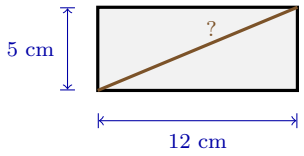
1. Donne la valeur exacte de $\sqrt{81}$, de $\sqrt{0{,}25}$ et de $\sqrt{144}$.
2. $\sqrt{-4}$ existe-t-il ? Explique.
3. Donne une valeur approchée de $\sqrt{2}$ au centième.

4. Combien vaut $\left(\sqrt{7}\right)^2$? Et $\sqrt{11^2}$?
5. Range dans l'ordre croissant : $\sqrt{9}$; $3{,}5$; $\sqrt{16}$; $\sqrt{12}$.

Exercice — 3. Deux longueurs à calculer



le mât et son hauban



le rectangle et sa diagonale

Le mât et le rectangle

1. Un mât vertical de 6 m est maintenu par un hauban fixé au sol à $4{,}5$ m de son pied. Calcule la longueur du hauban.
2. Un rectangle mesure 5 cm sur 12 cm. Calcule la longueur de sa diagonale.
3. Dans les deux cas, vérifie ton résultat en élevant au carré.

Exercice — 4. La copie de Yanis

Yanis doit calculer $\sqrt{9+16}$. Il écrit :

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

1. Calcule toi-même $\sqrt{9+16}$, en respectant l'ordre des opérations.
2. Compare avec le résultat de Yanis. Que peux-tu en conclure ?
3. Yanis répond : « c'est presque pareil, l'écart est petit ». Que lui réponds-tu ?
4. Le même raisonnement fonctionne-t-il avec la multiplication ? Teste sur $\sqrt{4 \times 9}$.

Séance 2 — Exposants négatifs

Objectif : Donner un sens à un exposant négatif en prolongeant le tableau des puissances ; Simplifier un quotient de puissances en revenant à la définition

Mise en commun de l'activité

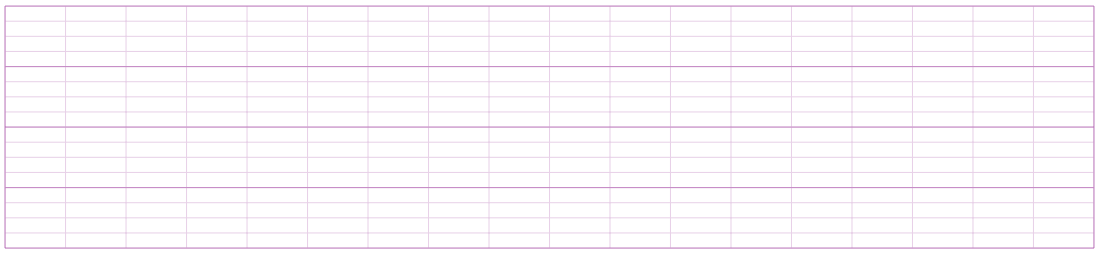
L'activité s'est arrêtée sur trois constats.

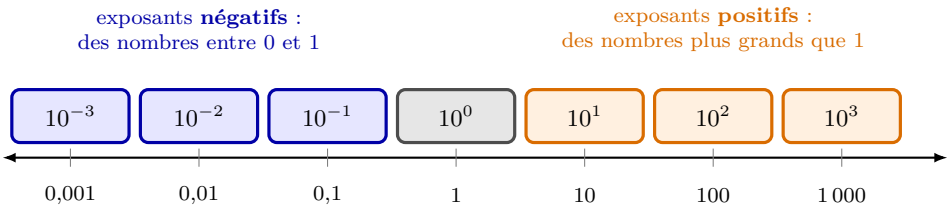
En descendant le tableau, l'exposant diminue de 1 et le résultat est divisé par la base. En continuant, on arrive à $10^0 = 1$, puis à $10^{-1} = 0{,}1$.

Le signe $-$ porte sur l'**exposant**, pas sur le nombre : 10^{-2} vaut $0{,}01$, un nombre positif.

Un quotient de puissances se simplifie en écrivant les facteurs et en barrant les communs : $\dfrac{5^3}{5^5} = \dfrac{1}{25} = 5^{-2}$.

Définition 2 : Exposant négatif





tous ces nombres sont **positifs** — le signe $-$ est sur l'exposant, pas sur le nombre

Les puissances de dix, de part et d'autre de 1

Exemple

$$\frac{2^2}{2^6} = \frac{2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$$

Après avoir barré les deux facteurs communs, il reste $\dfrac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \dfrac{1}{2^4} = 2^{-4}$.

Exercice — 1. Écritures

1. Écris sous forme décimale : 10^{-2} ; 2^{-3} ; 5^{-2} ; 4^{-1}.

2. Écris sous forme de puissance à exposant négatif : $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{32}$.

3. Vrai ou faux ? Corrige les affirmations fausses.

a. $3^{-2} = -9$ **b.** $10^{-3} = 0{,}001$ **c.** $7^0 = 0$ **d.** $2^{-1} = 0{,}5$

Exercice — 2. Trois quotients

Simplifie chaque quotient en écrivant les facteurs, puis donne le résultat sous forme d'une puissance à exposant négatif.

a. $\dfrac{3^2}{3^5}$

b. $\dfrac{7^4}{7^6}$

c. $\dfrac{10^5}{10^8}$

Bilan de la séquence

une remise en route, et une notation qui a rendez-vous au chapitre 13

Décimaux relatifs

même signe : produit ou quotient **positif**
signes contraires : **négatif**
ordre des opérations :
parenthèses, puissances,
× et ÷, puis + et −
$(-2)^2 = 4$ mais $-2^2 = -4$

Racine carrée

$\sqrt{a}$ est le nombre **positif**
dont le carré vaut a
a doit être positif : $\sqrt{-4}$ n'existe pas
$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$
toujours vérifier en élevant au carré
$\sqrt{a}$ est le côté du carré d'aire a

Exposants négatifs

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $a^0 = 1$
le signe est sur l'**exposant** :
$2^{-3} = 0{,}125$, un nombre positif
simplifier un quotient : écrire les facteurs, barrer les communs, lire ce qui reste
$\dfrac{10^5}{10^8} = \dfrac{1}{10^3} = 10^{-3}$

Ce que le programme écarte cette année : aucune propriété algébrique des racines carrées — en particulier $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ — et aucune formule générale sur les produits ou quotients de puissances. Les calculs découlent de la définition.

Ce que la séquence a mis en place

Entraînement en ligne

Ces exercices sont générés au hasard : on peut les refaire autant de fois que nécessaire, la correction est immédiate.

> **La note ne compte pour le bonus que si l'on est connecté.** En ouvrant un exercice par l'un des liens ci-dessous, on s'entraîne librement, mais rien n'est enregistré. Pour que le travail compte, il faut passer par la classe sur WIMS et ouvrir la feuille de la séquence.

- Obj. 1.1 Produits et quotients de relatifs
- Obj. 1.2 Priorités opératoires avec des relatifs
- Obj. 1.3 Quelle opération d'abord et quel signe ?
- Obj. 2.1 Racine carrée : la définition
- Obj. 2.2 Encadrer une racine carrée
- Obj. 2.3 Une longueur par la racine carrée
- Obj. 3.1 Exposant négatif : écriture décimale
- Obj. 3.2 Exposant négatif : écrire et reconnaître
- Obj. 4.1 Simplifier un quotient de puissances
- Obj. 4.2 Quotients de puissances : trois cas